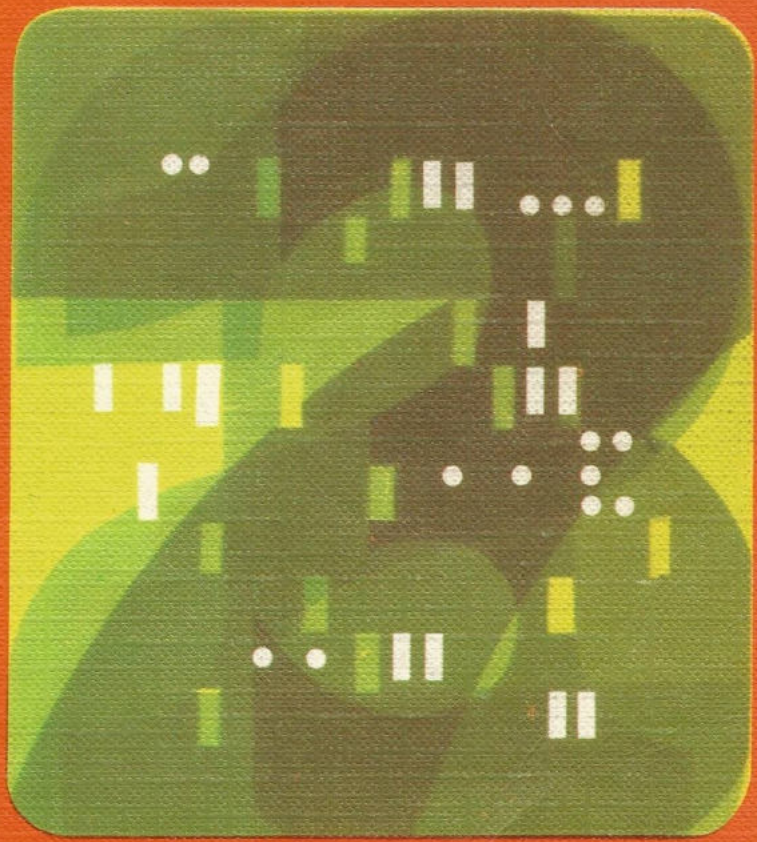
matemática 1

BACHILLERATO



Educación Santillana

matemática

matemática

1

BACHILLERATO

Educación Santillana

PROLOGO

En este libro se desarrolla totalmente el cuestionario oficial del primer curso de Bachillerato.
En las orientaciones metodológicas del Ministerio se indica que se debe abordar el cuestionario partiendo de los conceptos de **Anillo** *y* **Cuerpo** *introducidos en la segunda etapa de la Enseñanza General Básica. Esta sugerencia oficial nos ha reafirmado en el propósito de elaborar un libro de Matemática con una orientación moderna y práctica.*
Por una parte, se ha seguido la línea estructuralista, por la simplificación y poder de síntesis que supone su utilización en el tratamiento de los conceptos matemáticos. Por otra, y para conseguir un perfeccionamiento en los automatismos del cálculo, se resuelven muchos ejemplos y se proponen abundantes ejercicios.
Se han distribuido los contenidos en nueve Unidades, cada una de las cuales consta de varios temas afines.
La primera Unidad es de preliminares. En ella se estudian conceptos y técnicas que van a ser de utilización constante a lo largo del libro y que en su mayoría deben ser conocidas por los alumnos.
Aquí se pretende actualizar estos conocimientos a través de una formulación más precisa y operativa de los conceptos.
Cada Unidad va precedida de una introducción en la que se expone de un modo breve el propósito y alcance de la misma.
Análogamente, los temas llevan una pequeña introducción en la que se da una visión global de su contenido.
Al final de cada Unidad se da una visión global de la misma en un diagrama estructural; en este diagrama quedan también reflejadas las relaciones entre los contenidos que la integran.
Se ha dedicado una importancia capital a la adecuación de los ejercicios a la teoría, y a este fin se encuentran en el libro cuatro tipos de ejercicios.
Después de cada noción o definición se dan resueltos uno o varios ejemplos y a continuación se proponen en el margen varios ejercicios de aplicación inmediata de la teoría introducida; de este modo se facilita el aprendizaje, ya que un concepto matemático no está realmente asimilado hasta que no es correctamente utilizado.
Al final de cada tema se propone una página de ejercicios y cuestiones.
Los **ejercicios** *se refieren a una sola noción o a varias del mismo tema. Los hay de distinta dificultad, pero en general se pueden realizar con facilidad si antes se han resuelto los que van intercalados en el tema.*
Las **cuestiones** *son preguntas referidas a conceptos estudiados en el tema. Su contestación no supone ninguna dificultad.*
Una parte importante del libro aparece al final de la Unidad 9 con el título de **Complementos y ampliación.**
En los **complementos** *se desarrollan y proponen actividades y ejercicios que son de integración de la teoría expuesta en varios temas; son frecuentemente ejercicios más complicados que los que aparecen al final de cada tema.*
En la **ampliación** *se desarrollan y proponen actividades y ejercicios que son de ampliación de alguna noción estudiada en las Unidades.*
Las actividades de ampliación se incluyen en este libro con el propósito de atender a las diferencias individuales, no como parte sustantiva del mismo; por esta razón el uso que se haga de esta parte queda a criterio del profesor.

INDICE

PROLOGO 5

TABLA DE SIMBOLOS 10

UNIDAD 1.- CONJUNTOS. CORRESPONDENCIAS 11

TEMA 1.- **Conjuntos** 12

1. Determinación de conjuntos 12
2. Inclusión e implicación 13
3. Unión e intersección de conjuntos 15
4. Conjunto de partes: $\mathscr{P}(U)$ 16
5. Complementario 17
6. El álgebra de Boole de las partes de un conjunto . 18
7. Diferencia entre conjuntos 19
8. Proposiciones con cuantificadores 19
9. Relación entre cuantificadores 20

Ejercicios y cuestiones 22

TEMA 2.—**Correspondencias** 23

1. Producto cartesiano 23
2. Correspondencia o relación entre dos conjuntos 25
3. Relación en un conjunto 26
4. Propiedades usuales de las relaciones 27
5. Relaciones de equivalencia 27
6. Relación de orden 29
7. Aplicaciones 30
8. Tipos de aplicaciones 31
9. Igualdad de aplicaciones 33
10. Operación interna 33
11. Propiedades de las operaciones 34
12. Distributividad entre dos operaciones internas . 35
13. Estructuras algebraicas 35

Ejercicios y cuestiones 39

UNIDAD 2. COMBINATORIA 41

TEMA 3.—**Números combinatorios** 42

1. Números factoriales 42
2. Números factoriales generalizados 43
3. Números combinatorios 45
4. Propiedades de los números combinatorios ... 46
5. Triángulo de Pascal 48

Ejercicios y cuestiones 50

TEMA 4.—**Variaciones** 51

1. Número de aplicaciones entre dos conjuntos finitos 51
2. Variaciones con repetición 53
3. Número de aplicaciones inyectivas 54
4. Variaciones ordinarias 56

Ejercicios y cuestiones 58

TEMA 5.—**Permutaciones** 59

1. Aplicaciones biyectivas. Biyecciones 59
2. Permutaciones 60
3. Permutaciones con repetición 61

Ejercicios y cuestiones 63

TEMA 6.—**Combinaciones** 64

1. Subconjuntos: su formación y número 64
2. Combinaciones 67

Ejercicios y cuestiones 70

UNIDAD 3.—NUMEROS REALES 72

TEMA 7.—**Introducción al número real** 73

1. Representación lineal de $\mathbb{N}$ 73
2. Representación lineal de $\mathbb{Z}$ 74
3. Representación lineal de $\mathbb{Q}$ 74
4. Los números decimales 76
5. Expresión decimal de los números racionales. 77
6. Graduación decimal de la recta 79
7. Representación de un decimal 79
8. Aproximación decimal de un número no decimal 80

Ejercicios y cuestiones 82

TEMA 8.—**El número real** 83

1. Existencia de números no racionales 83
2. Números reales no racionales 84
3. Números decimales no racionales 86
4. Axioma de continuidad 87
5. Igualdad de expresiones decimales 88
6. Números reales 89
7. Adición de números reales 90
8. Multiplicación de números reales 92
9. Potenciación de números reales 94
10. Ordenación en $\mathbb{R}$ 95
11. Sucesión de números reales 97

Ejercicios y cuestiones 98

TEMA 9.—**Radicales** 99

1. Radicales cuadráticos 99
2. Radicales de índice n 100
3. Números radicales. Formas radicales 101
4. Multiplicación de radicales 104
5. División de radicales 106
6. Forma típica de un radical 108
7. El grupo aditivo de los radicales semejantes. 109
8. Potencias de radicales 110
9. Potencia de exponente racional 111
10. Racionalización de denominadores con radicales 112

Ejercicios y cuestiones 113

UNIDAD 4.—POLINOMIOS 115

TEMA 10.—**El anillo de los polinomios** 116

1. Definición de polinomio con coeficientes reales. 116
2. Tipos especiales de polinomios 117
3. Grado de un polinomio 117
4. Igualdad de polinomios 118
5. Forma canónica de un polinomio 119
6. Adición de polinomios 120
7. Propiedades de la adición de polinomios 121
8. El grupo $(\mathbb{R}[x], +)$ 122
9. Sustracción de polinomios 122
10. Multiplicación de polinomios 123
11. Propiedades de la multiplicación de polinomios 124
12. El anillo de los polinomios con coeficientes reales 125
13. El binomio de Newton 126

Ejercicios y cuestiones 128

TEMA 11. **Divisibilidad en el anillo de los polinomios** 129

1. La relación de divisibilidad en $\mathbb{Z}$ 129
2. Propiedades de la relación $|$ en $\mathbb{Z}$ 129
3. La relación de divisibilidad $\mathbb{R}[x]$ 130
4. Propiedades de la relación $|$ en $\mathbb{R}[x]$ 131
5. División con resto 133
6. Regla de Ruffini 133
7. Valor numérico de un polinomio 135
8. Resto de la división de un polinomio por $x - a$. 137
9. Factorización de polinomios 138
10. Polinomios irreducibles 139
11. Teorema de factorización 140

Ejercicios y cuestiones 141

TEMA 12.—**Cuerpo de razones algebraicas** 142

1. Fracciones algebraicas 142
2. Equivalencia de fracciones algebraicas 143
3. Adición de razones algebraicas 145
4. Propiedades de la adición de razones algebraicas 146
5. Sustracción de razones algebraicas 147
6. El grupo $(\mathbb{R}(x), +)$ 148
7. Multiplicación de razones algebraicas 149
8. Propiedades de la multiplicación de razones algebraicas 149
9. El anillo $(\mathbb{R}(x), -, \cdot)$ 150
10. Elemento inverso 151
11. División de razones algebraicas 151
12. El cuerpo $(\mathbb{R}(x), +, \cdot)$ 152
13. Isomorfismo de $\mathbb{R}[x]$ en una parte de $\mathbb{R}(x)$ ... 153

Ejercicios y cuestiones 154

UNIDAD 5. FUNCIONES POLINOMICAS Y SU REPRESENTACION GRAFICA 156

TEMA 13.—**Funciones polinómicas** 157

1. Funciones reales de variable real 157
2. Adición de funciones 158
3. Propiedades de la adición de funciones 159
4. Sustracción de funciones 160
5. El grupo $(\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +)$ de las funciones $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. 160
6. Multiplicación de funciones 161
7. Propiedades de la multiplicación de funciones. 162
8. El anillo $(\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), -, \cdot)$ 163
9. Funciones polinómicas 164

Ejercicios y cuestiones 166

TEMA 14.—**Representación gráfica de las funciones polinómicas** 167

1. Coordenadas cartesianas en el plano 167
2. Representación gráfica de una función 168
3. Simetrías de una función $f \subset \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 169
4. Gráfica de las funciones polinómicas de grado cero 170
5. Gráfica de las funciones polinómicas de grado uno 170
6. Gráfica de las funciones afines a intervalos ... 171
7. Gráfica de la función polinómica de grado dos. 172

Ejercicios y cuestiones 175

UNIDAD 6.—RESOLUCION DE ECUACIONES, INECUACIONES Y SISTEMAS 177

TEMA 15.—**Ecuaciones y sistemas de ecuaciones.** 178

1. Igualdades 178
2. Ecuación 178
3. Resolución de la ecuación de 1.er grado con una incógnita 180
4. Sistemas de ecuaciones lineales 181
5. Método de reducción o de las combinaciones lineales 182
6. Otros métodos de resolución de sistemas 184
7. Sistemas no lineales 184
8. Sistema de dos ecuaciones de 2.º grado 185

Ejercicios y cuestiones 186

TEMA 16.—**Inecuaciones. Sistemas de inecuaciones** 187

1. Desigualdades 187
2. Propiedades de las desigualdades 188
3. Inecuación 189
4. Resolución de una inecuación 189
5. Inecuación de 1.er grado con una incógnita ... 190
6. Sistemas de dos inecuaciones con una incógnita. 192
7. Inecuaciones $|x| \leqslant a$; $|x| \geqslant a$; $|cx - d| \leqslant a$... 193
8. Representación gráfica de la función $y = |x - a|$. 194
9. Inecuación de 1.er grado con dos incógnitas ... 194
10. Representación de un sistema de inecuaciones de 1.er grado con dos incógnitas 196
11. Resolución de la inecuación $ax^2 + bx + c > 0$.. 197

Ejercicios y cuestiones 198

UNIDAD 7. PROGRESIONES. INTERESES .. 200

TEMA 17.—**Progresiones aritméticas** 201

1. Término general de una sucesión 201
2. Progresión aritmética 202
3. Interpolación 204
4. Suma de n términos consecutivos 205

Ejercicios y cuestiones 207

TEMA 18. **Progresiones geométricas** 208

1. Progresión geométrica 208
2. Interpolación 210

3. Producto de n términos consecutivos 211
4. Suma de los n primeros términos 212
5. Progresión geométrica decreciente 213
Ejercicios y cuestiones 215

TEMA 19.—**Interés compuesto y anualidades** 216

1. Interés simple 216
2. Interés compuesto 217
3. Anualidades 218
Ejercicios y cuestiones 221

UNIDAD 8.—ESTADISTICA 224

TEMA 20.—**Probabilidad** 225

1. Fenómenos y experimentos aleatorios 225
2. Espacio muestral E 226
3. Espacio de sucesos 226
4. Algebra de Boole de los sucesos 227
5. Frecuencias 229
6. Propiedades de las frecuencias 230
7. Probabilidad: definición 231
8. Probabilidad: propiedades 231
9. Probabilidad del suceso intersección 235
Ejercicios y cuestiones 237

TEMA 21. **Variable aleatoria. Parámetros estadísticos** 238

1. Variable aleatoria 238
2. Distribución de frecuencias de una variable aleatoria 239
3. Gráfica de una distribución de frecuencias 244
4. Medidas de centralización 247
5. Media aritmética 247
6. Mediana 249
7. Moda 251
8. Medidas de dispersión 252
Ejercicios y cuestiones 257

UNIDAD 9. NUMEROS COMPLEJOS 259

TEMA 22.—**El cuerpo de los números complejos** .. 260

1. Definición e igualdad de números complejos. 260
2. Adición de números complejos 261
3. Propiedades de la adición de números complejos 261
4. El grupo $(\mathbb{C}, +)$ 262
5. Sustracción de números complejos 263
6. Multiplicación de números complejos 263
7. Propiedades de la multiplicación de números complejos 264
8. El anillo $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ 264
9. Elemento inverso 265
10. División de números complejos 265
11. El cuerpo $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ 266
Ejercicios y cuestiones 267

TEMA 23.—**Forma binómica del número complejo** . 268

1. Isomorfismo de $\mathbb{R}$ con una parte de $\mathbb{C}$ 268
2. La ecuación $x^2 = -1$ 269
3. Forma binómica de un número complejo 269
4. Parte real y parte imaginaria de un número complejo 270
5. Adición de números complejos en forma binómica 270
6. Diferencia de números complejos en forma binómica 271
7. Multiplicación de números complejos en forma binómica 271
8. Conjugado de un número complejo 273
9. Propiedades del conjugado 273
10. Cocientes de números complejos en forma binómica 274
11. Potencias de números complejos 275
12. Raíz cuadrada de un número complejo 276
Ejercicios y cuestiones 278

TEMA 24.—**Representación geométrica de los números complejos** 279

1. Módulo de un número complejo 279
2. Propiedades del módulo de un número complejo 279
3. Representación geométrica de un número complejo 280
4. Interpretación geométrica de la suma de números complejos 281
5. Interpretación geométrica del producto por i. 282
Ejercicios y cuestiones 283

Complementos y ampliación 285

TABLA DE SIMBOLOS

$\mathbb{C}$	conjunto de números complejos
$\mathbb{C}_0 = \{(a, 0) \mid a \in \mathbb{R}\}$	
$\{\dot{a}\}$	conjunto de los múltiplos de a
a/b	a divide a b
$n!$	factorial de n
$n^{(k)}$	factorial generalizado de n de orden k
$\binom{m}{n}$	número combinatorio m sobre n
card $(A \xrightarrow{a} B)$	número de aplicaciones de A en B
card $(A \xrightarrow{i} B)$	números de aplicaciones inyectivas de A en B
card $(A \xrightarrow{b} B)$	número de aplicaciones biyectivas de A en B
VR_n^k	variaciones con repetición de n elementos tomados de k en k
V_n^k	variaciones ordinarias de n elementos tomados de k en k
P_n	permutaciones de n elementos
$P_n^{\alpha_1, \beta_1 - \lambda}$	permutaciones de n elementos con repetición
C_m^k	combinaciones de n elementos tomados de k en k
$\perp$, $\blacktriangle$	signos de operaciones
$\sqrt{a}$	raiz enésima de a
π	número irracional que vale 3,141592...
$[a, b]$	segmento cerrado de extremos a y b
$]a, b[$	segmento abierto de extremos a y b
$[a, b[$	segmento cerrado por la izquierda y abierto por la derecha
$]a, b]$	segmento abierto por la izquierda y cerrado por la derecha
$\mathbb{R}[x]$	anillo de polinomios con coeficientes reales
∂f, gr (f)	grado del polinomio f
$(\mathbb{R}[x])^*$	conjunto de polinomios distintos del polinomio cero
$\frac{f}{g}$	fracción algebraica
$\left[\frac{f}{g}\right]$	razón algebraica
$\frac{f}{g} \sim \frac{f'}{g'}$	la fracción algebraica $\frac{f}{g}$ es equivalente a la fracción algebraica $\frac{f'}{g'}$
$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$	función real de variable real
$\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$	conjunto de las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$
$\mathscr{F}(A, B)$	conjunto de las aplicaciones de A en B
$\mathscr{P}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$	conjunto de las funciones polinómicas
$\lvert a \rvert$	valor absoluto del número a
a_n	término general de una sucesión
E	espacio muestral de un experimento aleatorio
$\bar{A}$	suceso contrario de A
$f_a(A)$	frecuencia absoluta del suceso A
$f_r(A)$	frecuencia relativa del suceso A
$p(A)$	probabilidad del suceso A
$p(A/B)$	probabilidad del suceso B condicionado al suceso A
X	variable aleatoria
f_i	frecuencias absolutas
h_i	frecuencias relativas
$\overrightarrow{AB}$	vector de origen A y extremo B
F_i	frecuencias absolutas acumulativas
H_i	frecuencias relativas acumulativas
$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$	(el subíndice i varía desde i hasta n)
$\bar{x}$	media aritmética
D. M.	desviación media
S^2	varianza
S	desviación típica
$i = \sqrt{-1}$	unidad imaginaria
$z = a + bi$	número complejo en forma binómica
Re (z)	parte real de z
Im (z)	parte imaginaria de z
$\bar{z}$	conjugado de z
z^{-1}	inverso de z
$\lvert z \rvert$	módulo de z
Arg (z)	argumento de z

Unidad 1

CONJUNTOS Y CORRESPONDENCIAS

Gran parte de las ideas de esta Unidad son conocidas por la mayoría de los alumnos de este nivel.

El propósito de esta Unidad es recordar los conceptos básicos que el alumno debió adquirir en la E. G. B. y que en este curso van a ser objeto de aplicación constante.

Se pretende también, formular nuevamente ciertas definiciones y resultados estudiados ya por el alumno, pero utilizando ahora un lenguaje más preciso y operativo.

- Se han concebido estos temas de un modo eminentemente práctico, por esta razón muchas de las propiedades estudiadas se proponen como ejercicios que el alumno debe realizar.
- En el primer tema, se estudian generalidades sobre conjuntos y se comprueban con los ejemplos y con los ejercicios las propiedades del álgebra de Boole de las partes de un conjunto.
- En el segundo, se estudian las relaciones binarias, las aplicaciones y las estructuras algebraicas en el grado en que se van a necesitar en este curso.

Tema 1

1. Determinación de conjuntos.
2. Inclusión e implicación.
3. Unión e intersección de conjuntos.
4. Conjunto de partes: $\mathscr{P}(U)$.
5. Complementario.
6. El álgebra de Boole de las partes de un conjunto.
7. Diferencia entre conjuntos.
8. Proposiciones con cuantificadores.
9. Relación entre los cuantificadores $\forall$ y $\exists$.

Tema 2

1. Producto cartesiano.
2. Correspondencia o relación entre dos conjuntos.
3. Relación de un conjunto.
4. Propiedades usuales de las relaciones.
5. Relaciones de equivalencia.
6. Relaciones de orden.
7. Aplicaciones.
8. Tipos de aplicaciones.
9. Igualdad de aplicaciones.
10. Operación interna.
11. Propiedades de las operaciones.
12. Distributividad entre dos operaciones internas.
13. Estructuras algebraicas.

Tema 1 CONJUNTOS

Al estudiar una teoría matemática cualquiera, es raro que aparezca un solo objeto, por eso es necesario emplear una palabra para referirse a una pluralidad de objetos. Preferentemente se utiliza para este fin la palabra conjunto.

En este tema, vamos a recordar brevemente ciertas generalidades sobre conjuntos, inclusión, unión, intersección, complementación, etc., sin las cuáles es muy difícil trabajar en un libro de Matemática.

1 Determinación de conjuntos

1.1. Si un objeto, x, es un elemento del conjunto A se escribe $x \in A$ y se lee: x *pertenece a* A; si x no pertenece a A se escribe $x \notin A$.

Ejemplos:

- $A = \{1, 3, 5, 7\}$; $\quad 1 \in A$; $\quad 0 \notin A$
- Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales y $\mathbb{Z}$ el de los enteros

$$\mathbb{N} = \{x \mid x \text{ es natural}\}$$
$$\mathbb{Z} = \{x \mid x \text{ es entero}\}$$

$$5 \in \mathbb{N}; \quad -7 \notin \mathbb{N}; \quad 2/3 \notin \mathbb{N}$$
$$-2 \in \mathbb{Z}; \quad 4 \in \mathbb{Z}; \quad 5/7 \notin \mathbb{Z}$$

1.2. Para describir un conjunto a veces se enumeran sus elementos así: $A = \{1, 2, 5, 7\}$; en este caso se dice que se ha determinado por extensión.

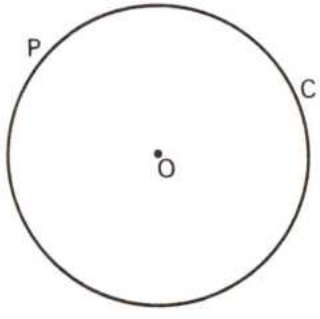
En otras ocasiones, el conjunto se determina mediante una propiedad que verifican todos sus elementos y sólo ellos. Por ejemplo, si C es el conjunto de los puntos de la circunferencia de centro O y radio 2 cm, lo definiremos como el conjunto de puntos que tienen la propiedad de estar a 2 cm de distancia del punto O.

Sea $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leqslant 13\}$ que se lee: el conjunto de los números x naturales que son menores o iguales que 13; la escritura de A por enumeración de todos sus elementos es mucho más enojosa. $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$.

Ejercicios:

1. Dado el conjunto $A = \{0, -1, a, \alpha\}$. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son ciertas?

$$0 \in A, \; -1 \notin A; \quad \alpha \in A; \quad \beta \in A; \quad 1/2\alpha \in A$$



$$C = \{P \mid \text{dist}\,(OP) = 2\,\text{cm}\}$$

Se lee: C es el conjunto de puntos P tales que la distancia OP es 2 cm.

2. Escribe por comprensión los conjuntos

$A = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots\}$
$B = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \ldots\}$
$C = \{-1, +1\}$

1.3. *Dos conjuntos A y B son iguales y se escribe $A = B$ si tienen los mismos elementos.*

Ejemplo:

$$A = \{1, 3, -1\};\ B = \{1, 3, 4\};\quad C = \{-1, 1, 3\},$$

entonces

$$A = C \quad \text{pero} \quad A \neq B$$

3. De los siguientes pares de conjuntos indica los que son iguales:

a) $\{0, 0, 1\}$ y $\{0, 1\}$

b) $\{0\}$ y $\{\varnothing\}$

c) $\{0\}$ y $\varnothing$

d) $\{0, 0, 1, 2\}$ y $\{1, 2, 0\}$

2 Inclusión e implicación

2.1. Sean A y B dos conjuntos.
Se dice que A es un subconjunto de B o que A está contenido en B y se escribe $A \subset B$ si todo elemento de A pertenece a B.

Si A no está contenido en B se escribe $A \not\subset B$.

Ejemplos:

- Sea $A = \{x \mid x = \dot{2}\}$ y $B = \{x \mid x = \dot{6}\}$ y entonces como todo múltiplo de 6 es múltiplo de 2 se sigue que $B \subset A$.
- Si $A = \{1, 3, 5\};\ B = \{2, a, 3, b, 1, 5\}$ se verifica $A \subset B$.
- Sea $A = \{\text{Juan}\};\ B = \{\text{Luis, Ana}\}$ entonces $A \not\subset B$ y $B \not\subset A$.

Es fácil probar que la inclusión goza de las siguientes propiedades:

1.º *Reflexiva:* $A \subset A$.

2.º *Transitiva:* Si $A \subset B$ y $B \subset C$ entonces $A \subset C$.

3.º *Antisimétrica:* Si $A \subset B$ y $B \subset A$, todo elemento de A pertenece a B y todo elemento de B pertenece a A, es decir, ambos conjuntos tienen los mismos elementos y son por tanto iguales.

Es decir

Si $A \subset B$ y $B \subset A$ se verifica $A = B$.

Según la definición, un conjunto A debe considerarse como subconjunto o parte de sí mismo $A \subset A$; es la inclusión en sentido amplio.
Si $A \subset B$, pero $A \neq B$ entonces se dice que A está contenido estrictamente en B.

4. Indica cuáles de las siguientes relaciones de inclusión son ciertas y cuáles falsas:

$$\{1, 3\} \subset \{3, 5, 7\}$$
$$\{0, 6, 12\} \subset \{x \mid x = \dot{3}\}$$
$$\{11, 121\} \subset \{x \in \mathbb{Z} \mid x > 11\}$$
$$\{x \in \mathbb{N} \mid x + 8 = 16\} \subset \{2, 3, 5, 8\}$$
$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$$
$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

5. Sean los conjuntos A, B y C de los que se sabe que $A \subset B$, $B \subset C$ y, además, que $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$, $d \notin A$, $e \notin B$, $f \notin C$. De las siguientes proposiciones indica cuáles son verdaderas y cuáles falsas. ¿Hay alguna de la que no se pueda decir si es verdadera o si es falsa? Ayúdate con un diagrama.

$a \in C$ $\quad$ $d \in B$
$b \in A$ $\quad$ $e \notin A$
$c \notin A$ $\quad$ $f \in A$

2.2. Consideremos dos conjuntos A y B definidos respectivamente mediante las propiedades p y q.
Veamos cómo se traduce la inclusión $A \subset B$ entre las propiedades p y q.

Por ser $A \subset B$ se verifica que:
Si $a \in A$ también $a \in B$, esto es:

Si a tiene la propiedad p también a tiene la propiedad q. Esto se expresa diciendo que la *propiedad p, implica la propiedad q*; se escribe: $p \Rightarrow q$.

Se observa que p es una condición suficiente para que se verifique q y q es condición necesaria de p.

Ejemplo:

- Sea $B = \{x \mid x = 10\dot{}\}$; q: es múltiplo de 10
  $A = \{x \mid x = \dot{5}\}$; p: es múltiplo de 5

$$\begin{array}{c} A \subset B \\ \downarrow \quad \downarrow \\ p \Rightarrow q \end{array}$$

Una condición suficiente para que un número sea múltiplo de 5 *es que sea múltiplo de* 10.

Una condición necesaria para que un número sea múltiplo de 10 *es que sea múltiplo de* 5.

2.3. Supongamos que $A = B$ entonces

$$\left.\begin{array}{c} A \subset B \\ \text{y} \\ B \subset A \end{array}\right\} \text{. es decir } \left\{\begin{array}{c} p \Rightarrow q \\ \text{y} \\ q \Rightarrow p \end{array}\right.$$

esta doble implicación se expresa $p \Leftrightarrow q$, lo que significa que p se verifica *si y sólo si* se verifica q; se dice por eso que p y q son equivalentes.

$p \Rightarrow q$ significa que p es condición suficiente de q.
$q \Rightarrow p$ significa que p es condición necesaria de q.

Luego $p \Leftrightarrow q$ *significa que* p *es condición necesaria y suficiente de* q.

Ejemplo:

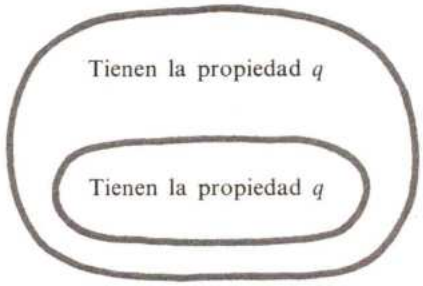
- $A = \{\text{múltiplo de } 2\}$
  $B = \{\text{números que acaban en } 0 \text{ o en cifra par}\}$

$$\begin{array}{c} A = B \\ \downarrow \quad \downarrow \\ p \Leftrightarrow q \end{array} \quad \text{es decir}$$

La condición necesaria y suficiente para que un número sea múltiplo de 2 *es que acabe en* 0 *o en cifra par.*

6. Si $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 - 7x + 12 = 0\}$
y $B = \{4, 3\}$.

¿Está A contenido estrictamente en B?



$A = \{x \mid x \text{ tiene la propiedad } p\}$

$B = \{x \mid x \text{ tiene la propiedad } q\}$

$$\begin{array}{c} A \subset B \\ \downarrow \quad \downarrow \\ p \Rightarrow q \end{array}$$

p es condición suficiente de q

q es condición necesaria de p.

2.4. Consideremos uno de los enunciados anteriores x es múltiplo de 10 o bien $x = 1\dot{0}$.

Este enunciado se convierte en una proposición verdadera para ciertos números naturales y en una proposición falsa para otros; se dice que $p(x) : x$ es múltiplo de 10 es una *función proposicional* definida en el conjunto $\mathbb{N}$. Para cada número natural, $p(x)$ se convierte en una proposición. Así, para $x = 2$ y $x = 20$ resulta:

$p(2) : 2$ es múltiplo de 10

$p(20) : 20$ es múltiplo de 10

$p(2)$ es una proposición falsa y $p(20)$ es una proposición verdadera.

Se llama *función proposicional* definida en un conjunto A *a toda expresión que se convierte en una proposición para cualquier elemento de* A.

Sea $p(x)$ una función proposicional definida en un conjunto A. El subconjunto de A, formado por los elementos que verifican a $p(x)$, se llama a veces *conjunto de verdad de* $p(x)$ *conjunto-solución* o también *parte de* A *asociada a* $p(x)$.

7. Sean $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ y las siguientes funciones proposicionales definidas en A:

$p(x) : x$ es múltiplo de 4; es decir: $x = \dot{4}$
$q(x)$: x es múltiplo de 3; es decir: $x = \dot{3}$

Comprueba que los conjuntos de verdad P de $p(x)$ y Q de $q(x)$ son:

$$P = \{4, 8, 12\}; \quad Q = \{6, 12\}$$

8. Sean $q(x)$ y $h(x)$ dos funciones proposicionales definidas en:

$M = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24\}$
$q(x) : x = \dot{3}$
$h(x) : x < 16$

Si A y H son las partes de M asociadas a $q(x)$ y $h(x)$ respectivamente halla A y H.

9. ¿Tiene $q(x)$ en el ejercicio 7 el mismo conjunto de verdad que en el ejercicio 8?

3 Unión e intersección de conjuntos

3.1. Sean A y B dos conjuntos.

Se llama *unión de* A *y* B *y se escribe* $A \cup B$, *el conjunto formado por los elementos que pertenecen a* A *o a* B.

Es decir

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \quad \text{o} \quad x \in B\}$$

Aquí la o, como generalmente ocurre en Matemática significa y/o.

Ejemplos:

- $A = \{2, 4, 6\}$; $B = \{1, 3\}$, entonces $A \cup B = \{2, 4, 6, 1, 3\}$.
- $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ es par$\}$; $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ es impar$\}$ entonces $A \cup B = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ es par o impar$\} = \mathbb{N}$.
- $A = \{1, 2, 3\}$; $B = \{2, 3, 5\}$, entonces $A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$.

Si $A \subset B$ entonces $A \cup B = B$. Compruébese con un ejemplo.

10. Calcula $A \cup B$, siendo

$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 - 8x + 16 = 0\}$
$B = \{7, -1\}$

11. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son falsas?

a) $A \not\subset A \cup B$
b) $B \subset A \cup B$
c) $A \cup B \subset A$
d) $A \subset A \cup B$
e) $\{x \mid x = \dot{2}\} \cup \{x \mid x = \dot{3}\} = \mathbb{N}$

12. Dados los conjuntos

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
$B = \{2, 4, 7, 9\}$
$C = \{3, 4, 5, 7, 0\}$

Comprueba que

a) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
b) $A \cup B = B \cup A$
c) $A \cup A = A$

3.2. Dados dos conjuntos A y B.

Se llama intersección de A y B, y se escribe $A \cap B$, al conjunto formado por los elementos que pertenecen a A y a B.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \quad \text{y} \quad x \in B\}$$

Ejemplos:

- $A = \{0, 1, 3\}$; $B = \{1, 3\}$ entonces $A \cap B = \{1, 3\}$.
- $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N}$.
- Sea $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x + 8 = -1\}$

  $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - 81 = 0\}$

  $A \cap B = \{-9\} \cap \{9, -9\} = \{-9\}$

Si $A \subset B$ entonces $A \cap B = A$, pues todo elemento de A es elemento de B. Compruébese con un ejemplo.

Se llama *conjunto vacío* a aquel que no tiene elementos, se escribe $\varnothing$.

$$\{x \in \mathbb{N} \mid x^2 = -1\} = \varnothing$$
$$\{x \in \mathbb{Q} \mid x \neq x\} = \varnothing$$
$$\{x \in \mathbb{Z} \mid 3x = 1\} = \varnothing$$

3.3. *Dos conjuntos A y B se llaman disjuntos si $A \cap B = \varnothing$.*

Sea $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = \dot{3}\}$ y $B = \{5, 7, 10\}$ entonces $A \cap B = \varnothing$ luego A y B son disjuntos.

13. Cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas.

a) $A \not\subset A \cap B$

b) $A \cap B \not\subset A$

c) Si $A = B$ entonces $A \cap B = A$

d) $\{x \mid x = \dot{2}\} \cap \{x \mid x = \dot{4}\} = \{x \mid x = \dot{4}\}$

14. Dados los conjuntos A, B y C, del ejercicio **12.**, comprueba que:

a) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

b) $A \cap B = B \cap A$

c) $A \cap A = A$

d) $A \cap \varnothing = \varnothing$

e) $A \cup \varnothing = A$

f) $A \cup (B \cap A) = A$

g) $A \cap (B \cup A) = A$

h) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

i) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

15. ¿Son disjuntos A y B?

$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - 8x + 15 = 0\}$

$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x + 5 = 10\}$

16. ¿Son disjuntos A y B?

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = \dot{3} \quad \text{y} \quad x \geqslant 12\}$

$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x = \dot{5}\}$

4 Conjunto de partes: $\mathcal{P}(U)$

Sea ahora U un conjunto que supondremos fijo y llamaremos *universo* o referencial; el conjunto cuyos elementos son los subconjuntos de U se llama el *conjunto de las partes de U* y se escribe $\mathcal{P}(U)$.

Sea $U = \{1, 2, a\}$ entonces

$$\mathcal{P}(U) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{a\}, \{1, 2\}, \{1, a\}, \{2, a\}, U\}.$$

17. Hallar $\mathcal{P}(U)$ si $U = \{1, 2\}$.

18. ¿Es cierto la relación $A \in \mathcal{P}(U) \Rightarrow A \subset U$?

¿Es cierta la relación $A \subset U \Rightarrow A \in \mathcal{P}(U)$?

Si ambas son ciertas se podrá escribir

$$A \in \mathcal{P}(U) \Leftrightarrow A \subset U$$

5 Complementario

5.1. Sea U el conjunto referencial y $A \in \mathcal{P}(U)$ es decir $A \subset U$, se define el complementario de A en U y se escribe $C_U(A)$ o simplemente A' al conjunto formado por los elementos de U que no pertenecen a A.

$$A' = \{x \in U \mid x \notin A\}$$

Ejemplos:

- Sea $U = \mathbb{N}$ y $A = \{x \mid x = \dot{2}\}$, es decir, $A = \{x \mid x$ es múltiplo de $2\}$ entonces $C_U(A) = A' = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ no es múltiplo de $2\} = \{x \mid x$ es impar$\}$.

Obsérvese que la propiedad que define al complementario de A es la negación de la propiedad de A.

- Sea $U = \{1, 2, 3, 4, 5, a, b, c\}$ y $A = \{4, 5, c\}$, entonces

  $A' = \{1, 2, 3, a, b\}$.

- Consideremos los conjuntos

  $U_1 = \{a, b\} = A$
  $U = \{a, b, c, d\}$

  el complementario de A depende del conjunto que se tome como referencial.

  Si tomamos U, $C_U(A) = \{c, d\}$.

  Si tomamos U_1, $C_{U_1}(A) = \varnothing$.

  En este ejemplo se ve la importancia que tiene fijar en cada caso el referencial.

5.2. Sean A y B dos partes de U. Designemos por A' y B' los complementarios de A y B respecto de U. Se verifican las siguientes propiedades llamadas leyes de Morgan:

$$(A \cup B)' = A' \cap B' \quad [1]$$
$$(A \cap B)' = A' \cup B' \quad [2]$$

Para probar [1] demostraremos que todo elemento de $(A \cup B)'$ pertenece a $A' \cap B'$ y recíprocamente.

Sea $x \in (A \cup B)'$ las equivalencias del margen prueban que $x \in A' \cap B'$.

Del mismo modo se prueba [2].

En los dos esquemas demostrativos del margen se han aplicado las definiciones de unión, intersección y de conjunto complementario.

19. Sea $U = \{1, 2, a, b\}$. Calcula:

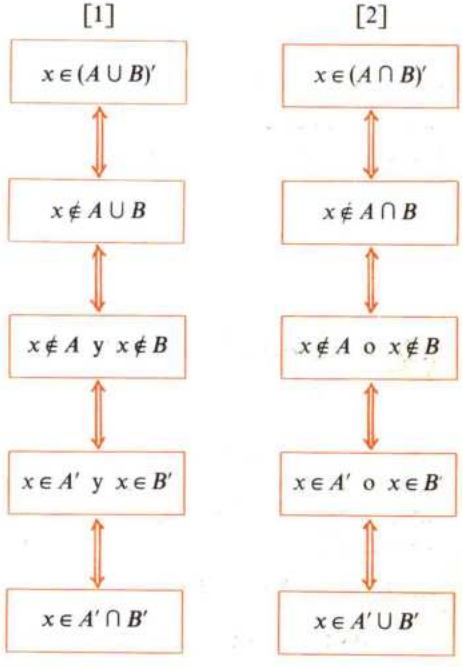
a) El complementario de $\{2, a\}$.
b) ¿Quién es $C_U(\varnothing)$ o $\varnothing'$?
c) ¿Quien es $C_U(U)$ o U'?
d) ¿Cuánto vale $A \cup A'$ y $A \cap A'$?

20. Sean los conjuntos

$U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;
$B = \{2, 4, 6, 8\}$
$C = \{0, 1, 2, 4, 8\}$

Comprueba que:

a) $(A')' = A$
b) $(A \cup B)' = A' \cap B'$
c) $(A \cap B)' = A' \cup B'$
d) $(A \cap B \cap C)' = A' \cup B' \cup C'$
e) $(A \cup B \cup C)' = A' \cap B' \cap C'$



6 El álgebra de Boole de las partes de un conjunto

6.1. En el siguiente cuadro se indican las propiedades que permiten afirmar que el conjunto $\mathscr{P}(U)$, con las operaciones de unión e intersección es un álgebra de Boole.

ESTRUCTURA DEL CONJUNTO $\mathscr{P}(U)$						
$A \in \mathscr{P}(U)$ $B \in \mathscr{P}(U)$ $C \in \mathscr{P}(U)$		OPERACIONES DEFINIDAS EN $\mathscr{P}(U)$		RETICULO	RETICULO DISTRIBUTIVO	ALGEBRA DE BOOLE
		Unión	**Intersección**			
PROPIEDADES	*Asociativa*	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$			
	Conmutativa	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$			
	Idempotente	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$			
	Simplificativa	Unión respecto intersección $A \cup (B \cap A) = A$ Intersección respecto unión $A \cap (B \cup A) = A$				
	Distributiva	Unión respecto intersección $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ Intersección respecto unión $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$				
	Elementos neutros	$\varnothing$ es elemento neutro de la unión. U es el elemento neutro de la intersección				
	Complementación	$A \cup A' = U \quad A \cap A' = \varnothing$				

7 Diferencia entre conjuntos

7.1. Dado dos conjuntos, *se llama diferencia de A y B, y se escribe A − B, al conjunto formado por los elementos de A que no pertenecen a B.*

$$A - B = \{x \mid x \in A \quad \text{y} \quad x \notin B\}$$

Sea $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{2, 5, 7\}$ entonces

$$A - B = \{1, 3\} \quad \text{y} \quad B - A = \{2\}.$$

Se observa que $A - B \neq B - A$.

7.2. *Se llama diferencia simétrica de A y B y se escribe $A \Delta B$ al conjunto $(A - B) \cup (B - A)$*

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

Sea $A = \{3, 5, 7, 9\}$, $B = \{3, 7, 4, 8\}$

$A - B = \{5, 9\}$, $B - A = \{4, 8\}$

$A \Delta B = \{5, 9\} \cup \{4, 8\} = \{5, 9, 4, 8\}$.

21. ¿Cuánto vale $A - \varnothing$? ¿Y $\varnothing - A$?

22. Si $A \subset B$. ¿Cuánto vale $A - B$?

23. Hallar $A - B$ y $B - A$ siendo

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 12\}$ y $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 18\}$

24. Comprueba gráficamente que la diferencia de conjuntos no tiene la propiedad asociativa, es decir,

$$(A - B) - C \neq A - (B - C)$$

25. Comprueba con los conjuntos

$A = \{1, 3, 5, 7\}$; $C = \{3, 4, 5, 7, 8\}$;
$B = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$ que:

a) $A \Delta B = B \Delta A$

b) $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$

c) $A \Delta \varnothing = A$

d) $A \Delta A = \varnothing$

e) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$

8 Proposiciones con cuantificadores

8.1. *Proposiciones con cuantificador universal.*

La expresión $p(x) : x \leqslant 8$, definida en el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales, es una *función proposicional.*

El conjunto $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ es el conjunto-solución de la función proposicional definida en $\mathbb{N}$.

Considérese el enunciado siguiente:

«Para todo x de $\mathbb{N}$ se verifica $x \leqslant 8$».

Simbólicamente se representa:

$$[\forall x \in \mathbb{N};\ x \leqslant 8]$$

Se observa que esta expresión es una proposición, porque se puede decir que es falsa, sin necesidad de dar a x ningún valor.

Por tanto, *cuando a una función proposicional se le antepone el «cuantificador universal» ($\forall$), se obtiene una proposición.*

8.2. *Proposiciones con cuantificador existencial.*

Sea ahora la función proposicional $q(x) : 2x + 8 = 14$ definida en el conjunto $\mathbb{N}$. El conjunto de verdad de esta función proposicional es $B = \{3\}$, ya que $q(x)$ se convierte en proposición verdadera sólo para $x = 3$.

Considérese el enunciado siguiente:

«Existe al menos un x de $\mathbb{N}$ tal que se verifica $2x + 8 = 14$.»

Sinbólicamente se expresa así:

$$[\exists x \in \mathbb{N};\ 2x + 8 = 14]$$

Se observa que esta expresión es una proposición porque tiene sentido decir que es verdadera, ya que $2 \cdot 3 + 8 = 14$.

Luego, *cuando a una función proposicional se le antepone el «cuantificador existencial» ($\exists$), se obtiene una proposición.*

26. A partir de las siguientes funciones proposicionales definidas con el conjunto $\mathbb{N}$, escribe varias proposiciones con ayuda de los cuantificadores $\forall$ y $\exists$

a) $x \leqslant 7$

b) $x > 4$

c) $x = x$

d) $x \neq x$

e) $x + 1 > x$

f) $x + 2 = 6$

9 Relación entre cuantificadores

9.1. *Relación entre los cuantificadores $\forall$ y $\exists$.*

Sea la proposición p: «Algunos hombres son sabios».

Si $H = \{\text{hombres}\}$, la proposición anterior se puede expresar simbólicamente así:

$$[\exists x \in H;\ x \text{ es sabio}]$$

Se lee:

«Existe al menos un hombre que es sabio».

Existe al menos un hombre que es sabio = Algunos hombres son sabios.

La negación de p es:

no p: «Es falso que algunos hombres son sabios».

Obsérvese que:

Es falso que algunos hombres son sabios = es falso que existe un hombre que es sabio = no existe un solo hombre sabio = = ningún hombre es sabio.

Esta última proposición se puede expresar:

$$[\forall x \in H;\ x \text{ no es sabio}]$$

27. Con el cuantificador $\forall$ y las cuatro funciones proposicionales siguientes, definidas en el conjunto $\mathbb{Q}$, escribe otras tantas proposiciones

a) $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$

b) $\frac{x}{2} = 8$

c) $(x + 2)^2 > x + 1$

d) $x - 3 = 0$

28. De las proposiciones obtenidas en el ejercicio anterior indica las que son verdaderas y las que son falsas.

Por tanto

$$no\ [\exists x \in H;\ x \text{ es sabio}] = \\ = [\forall x \in H;\ x \text{ no es sabio}]$$

En general, la negación de la proposición

$$[\exists x \in H;\ p(x)]$$

es:

$$no\ [\exists x \in H;\ p(x)] = [\forall x \in H;\ no\ p(x)]$$

Para negar una proposición con el cuantificador existencial, se cambia éste por el cuantificador universal y se niega la función proposicional.

9.2. Sea ahora la proposición q: «Todos los hombres son mortales.»

Se expresa:

$$[\forall x \in H;\ x \text{ es mortal}]$$

La negación de q es:

no q: «Es falso que todos los hombres son mortales.»

no q: «Existen algunos hombres inmortales.»

no q: «Existe al menos un hombre que no es mortal.»

La última proposición se expresa simbólicamente:

$$[\exists x \in H;\ x \text{ no es mortal}]$$

Por tanto:

$$no\ [\forall x \in H;\ x \text{ es mortal}] = \\ = [\exists x \in H;\ x \text{ no es mortal}]$$

En general, la negación de la proposición

$$[\forall x \in H;\ q(x)]$$

es:

$$no\ [\forall x \in H;\ q(x)] = [\exists x \in H;\ no\ q(x)]$$

Para negar una proposición con el cuantificador universal, se cambia éste por el cuantificador existencial y se niega la función proposicional.

29. Escribe la negación de las siguientes proposiciones:

a) $\exists x \in \mathbb{N}, \quad x + 1 = 9$

b) $\exists x \in \mathbb{Z}, \quad x + 2 = 0$

c) $\exists x \in \mathbb{N}, \quad x - 7 = 9$

30. Escribe la negación de las siguientes proposiciones:

a) $\forall x \in \mathbb{N}, \quad x + 2 > x + 1$

b) $\forall x \in \mathbb{Z}, \quad x^2 + 1 \geqslant 2$

c) $\forall x \in \mathbb{N}, \quad x > 4$

31. Escribe la negación de las proposiciones obtenidas en el ejercicio **26** e indica las que son verdaderas y las que son falsas.

Ejercicios y cuestiones

32. Se tienen tres conjuntos A, B y C tales que $A \subset B$, $C \subset B$ y $A \cap C = \varnothing$. Sean p, q y r las propiedades características de A, B y C respectivamente. Establece entre ellas implicaciones y no implicaciones.

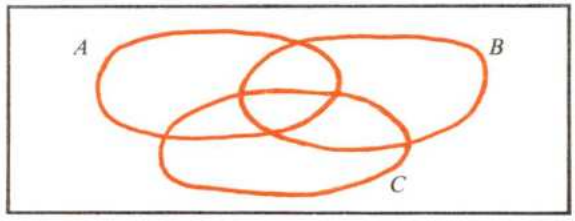
33. Considera el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Halla $\mathcal{P}(A)$. ¿Es $B = \{1, 3, 4\} \in \mathcal{P}(A)$? ¿Cuál es el conjunto complementario de B respecto de A?

34. Considera los conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$; $B = \{b, c, d, e, f\}$; $C = \{d, e, f, g, h, i\}$ y $D = \{h, i\}$ subconjuntos de $U = \}a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$.

Halla:

• $A \cup B$	• $A \cap B$	• $A - B$	• $A \Delta B$	• $(A - B) - C$	• $A - (B - C)$
• $A \cup C$	• $A \cap C$	• $A - C$	• $A \Delta C$	• $(A \Delta B) \Delta C$	• $A \Delta (B \Delta C)$
• $A \cup D$	• $A \cap D$	• $A - D$	• $A \Delta D$	• $A \cap D$	• $A \cap (B - D)$
• $B \cup C$	• $B \cap C$	• $B - C$	• $B \Delta C$	• $A \cup (B \Delta D)$	• $(A \cup B)$

35. Sean los conjuntos A, B y C representados gráficamente



Haz 8 diagramas como el de la figura y raya en cada uno de ellos los resultados de las siguientes operaciones:

a) $(A - C) \cap B$
b) $(A \cap B) - C$
c) $(A \cup C) - B$
d) $(A \cup B) - C$
e) $A \Delta C$
f) $(A \Delta B) \cup C$
g) $A' \cap C$
h) $(B' \cap C) \cup A$

36. Si $A \cup B = \varnothing$ ¿cómo han de ser A y B?

37. Sabiendo que $A - B = A \cap B'$, escribe $A \Delta B$ en función de la unión, la intersección y los complementarios de A y B.

38. Si A y B son dos conjuntos finitos, comprueba que

$$\text{card}\,(A \cup B) = \text{card}\,(A) + \text{card}\,(B) - \text{card}\,(A \cap B)$$

39. ¿Son iguales los conjuntos $A \cup (A \cap B)$ y $A \cap (A \cup B)$?

40. Sea E el conjunto de los números naturales que verifican

$$1 < x \leqslant 60;\ E = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x \leqslant 60\}$$

Consideremos las siguientes partes de E:

$$A = \{x \in E \mid x \text{ es primo y } x \leqslant 30\}$$
$$B = \{x \in E \mid x \text{ es primo o } x \leqslant 30\}$$
$$C = \{x \in E \mid x \text{ es primo}\}$$

Enumera los elementos de cada uno de los conjuntos anteriores.

41. ¿Qué se puede decir de dos conjuntos A y B tales que $A \cup B = A \cap B$?

42. Sean $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $A = \{2, 3, 4, 5\}$; $B = \{2, 3\}$.

Halla todas las partes X de E tales que $B \cup X = A$.

Tema 2 CORRESPONDENCIAS

Tres nociones importantes se desarrollan en este tema: relación binaria, aplicación y operación interna.

Se inicia el tema con la definición de producto de dos y tres conjuntos. A continuación se estudian las relaciones de equivalencia y las de orden distinguiendo en estas últimas las relaciones de orden total y las de orden parcial.

Al estudiar la clasificación de las aplicaciones en inyectivas, suprayectivas y biyectivas, se ha insistido en las definiciones operativas, es decir, aquellas que se emplean en la práctica para averiguar de qué tipo es una aplicación dada.

Finalmente se definen las estructuras fundamentales de grupo, anillo y cuerpo.

1 Producto cartesiano

1.1. Dados los conjuntos A y B, distintos o no, con un elemento $x \in A$ y otro elemento $y \in B$, se puede formar un nuevo objeto matemático llamado *par ordenado*, que se designa por (x, y).

$x \in A$ se llama *primera componente* del par e $y \in B$ se llama *segunda componente* del par.

1.2. Sean A y B dos conjuntos; se llama *producto cartesiano* de A por B, y se escribe $A \times B$, al conjunto de todos los pares ordenados cuya primera componente pertenece a A y cuya segunda componente pertenece a B.

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A,\ y \in B\}$$

Ejemplo:

- Si $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b, c\}$

  entonces

  $A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c), (3, a), (3, b), (3, c)\}$

  Al margen se ha representado este producto cartesiano.

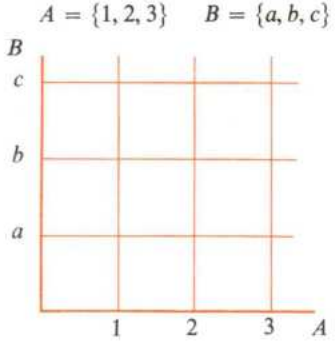


Diagrama cartesiano de $A \times B$

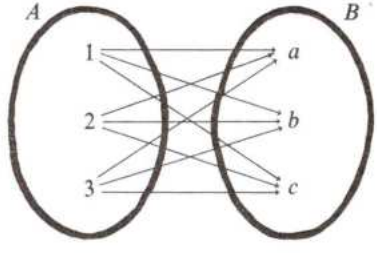


Diagrama de flechas de $A \times B$

1. Si $X = \{a, b, 1, 2\}$, $Y = \{1, 3\}$.

Representa $X \times Y$. ¿Cuántos elementos tiene $X \times Y$?

1.3. En el producto cartesiano $A \times A$ se llama *diagonal*, y se representa por Δ, al conjunto de los pares cuyas dos componentes son iguales, es decir:

$$\Delta = \{(x, x) \mid x \in A\}$$

1.4. Dados tres conjuntos A, B y C, distintos o no y un elemente $x \in A$, otro elemento $y \in B$ y otro elemento $z \in C$, se puede formar un nuevo objeto matemático llamado terna, que se designa por (x, y, z).

1.5. Se llama producto cartesiano de los conjuntos A, B y C en este orden, y se escribe $A \times B \times C$, al conjunto de todas las ternas (x, y, z) posibles donde $x \in A$, $y \in B$ y $z \in C$, es decir:

$$A \times B \times C = \{(x, y, z) \mid x \in A,\ y \in B,\ z \in C\}$$

Ejemplo:

- Consideremos los conjuntos

$$A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{a, b\}, \quad C = \{m, p, q\}$$

El producto $A \times B \times C$ se ha representado en el diagrama en árbol del margen; a la derecha del diagrama aparecen las ternas del producto $A \times B \times C$.

1.6. Cuando interesa calcular el número de elementos del producto cartesiano es conveniente representar éste mediante un diagrama en árbol como se ha hecho en el ejemplo anterior, en el cual se observa que:

$$\text{card}\,(A \times B \times C) = 3 \times 2 \times 3 = 18 \text{ elementos}$$

En general, si $\text{card}\,(A) = n_1$, $\text{card}\,(B) = n_2$ y $\text{card}\,(C) = n_3$, en el árbol de $A \times B \times C$ habrían n_1 ramas que partirían del punto inicial; de cada una de estas ramas saldrían n_2 ramas, finalmente de cada una de estas últimas saldrían n_3 ramas; el número total de estas últimas será: $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3$, luego:

$$\text{card}\,(A \times B \times C) = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 = \text{card}\,(A) \cdot \text{card}\,(B) \cdot \text{card}\,(C)$$

1.7. La igualdad de pares ordenados se define del modo siguiente:

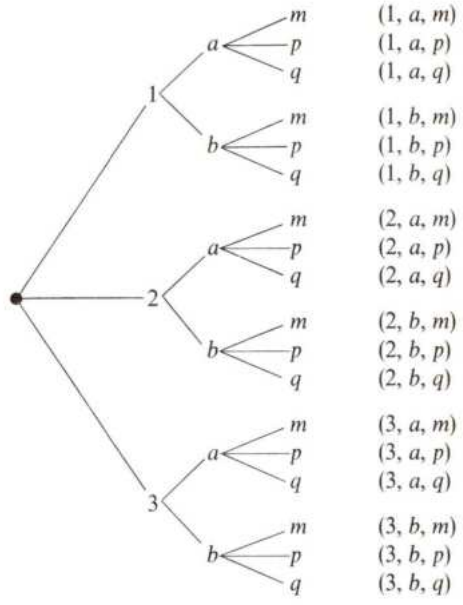
$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow (a = c) \text{ y } (b = d)$$

Análogamente se define la igualdad de ternas

$$(a, b, c) = (n, v, z) \Leftrightarrow (a = n) \text{ y } (b = v) \text{ y } (c = z)$$

2. Halla la diagonal del producto $A \times A$ siendo $A = \{1, a, b, c\}$.

$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$, $C = \{m, p, q\}$



3. Comprueba con un ejemplo que

$$A \times B \neq B \times A$$

4. Una persona tiene 2 pantalones, 4 camisas y 3 pares de calcetines.

¿De cuántas formas diferentes puede vestirse?

5. ¿Cuántos números de dos cifras pueden escribirse de modo que la cifra de las decenas sea impar y la de las unidades sea par?

6. Representa en un diagrama en árbol el producto $A \times B$ siendo

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}, \quad B = \{2, 4, 6, 8, 0\}$$

2 Correspondencia o relación entre dos conjuntos

2.1. Sean A y B dos conjuntos y sea G una parte del producto cartesiano $A \times B$; la función proposicional $(x, y) \in G$ se verifica para los pares de $A \times B$ que pertenecen a G y no se verifica para aquellos que pertenecen a $(A \times B) - G$.

Definición: *Dos conjuntos A y B y un subconjunto G de $A \times B$ definen una correspondencia o relación f entre A y B.*

La correspondencia f queda determinada cuando se conoce la terna (A, B, G), $f = (A, B, G)$.

El conjunto A se llama *conjunto de partida* o *conjunto inicial* de la correspondencia, B se llama *conjunto de llegada* o *conjunto final.*

G se llama *grafo* de la correspondencia.

Ejemplos:

- Sea $A = \mathbb{N}$ y $B = \mathbb{Z}$, entonces, si $G = \{(a, a-1)/a \in \mathbb{N}\}$, la terna $(\mathbb{N}, \mathbb{Z}, G)$ es una correspondencia de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{Z}$.

- Sea $A = \{1, 2, b\}$, $B = \{a, b\}$ y $G = \{(1, a), (2, b), (3, c)\}$ la terna (A, B, G) *no* es una correspondencia entre A y B pues $G \not\subset A \times B$ ya que $(3, c) \notin A \times B$.

- Consideremos la correspondencia $f = (A, B, G)$ entre A y B.

$$A = \{1, 3, 5, 7\}, \qquad B = \{a, b, c, d\}$$

$$G = \{(1, a), (3, a), (5, a), (5, c), (7, d)\}$$

Al margen se dan dos representaciones gráficas de la correspondencia f.

2.2. Sea Γ una correspondencia con conjunto inicial A, conjunto final B y grafo G; $\Gamma = (A, B, G)$.

A partir de la correspondencia $\Gamma = (A, B, G)$ se puede definir una nueva correspondencia que se llama *inversa* o *recíproca de la* Γ, y se escribe Γ^{-1} del modo siguiente: $\Gamma^{-1} = (B, A, G^*)$ donde:

$$G^* = \{(b, a) \in B \times A/(a, b) \in G\}$$

Obsérvese que el conjunto inicial de Γ^{-1} es el final de Γ, y que el final de Γ^{-1} es el inicial de Γ.

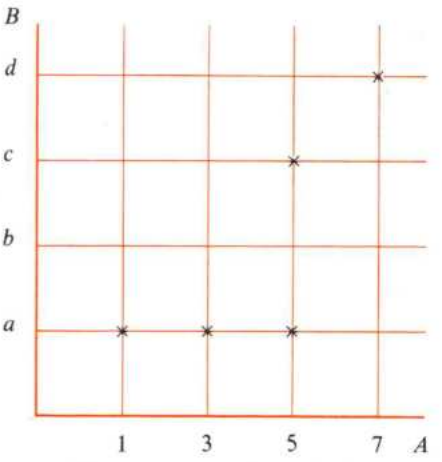


Diagrama cartesiano de f.

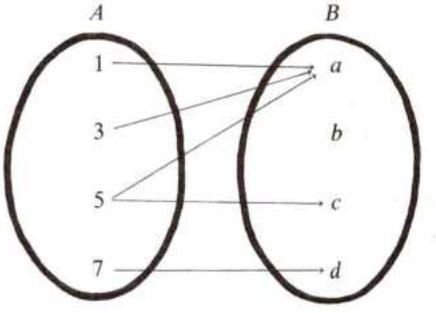
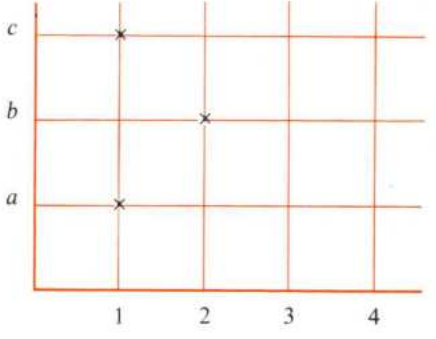


Diagrama de flechas de f.

7. Representa gráficamente y halla la recíproca de la correspondencia Γ' cuya representación gráfica es



Ejemplos:

- Sea $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x, y, z\}$ y sea

  $$G = \{(1, x), (1, y), (2, z), (2, x), (3, y)\}$$

  entonces, si llamamos Γ a la correspondencia $\Gamma = (A, B, G)$

  se tiene $\Gamma^{-1} = (B, A, G^*)$

  donde $G^* = \{(x, 1), (y, 1), (z, 2), (x, 2), (y, 3)\}$

- Considera la correspondencia Γ entre

  $$A = \{1, 2, 3\} \quad y \quad B = \{x, y\}$$

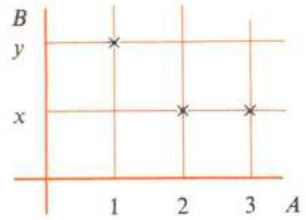
  cuya representación gráfica es la de la figura 1, entonces

  $$\Gamma = (A, B, G)$$

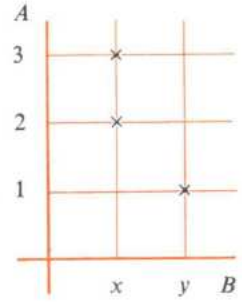
  donde $G = \{(1, y), (2, x), (3, x)\}$ y $\Gamma^{-1} = (B, A, G^*)$

  con $G^* = \{(y, 1), (x, 2), (x, 3)\}$

  La representación gráfica de Γ^{-1} es la de la figura 2.



(Fig. 1)



(Fig. 2)

3 Relación en un conjunto

Una correspondencia entre el conjunto A y sí mismo se llama una relación en A, es decir, *una relación en A viene definida por un subconjunto G de A × A.*

Este conjunto G se llama el grafo de la relación. Como una relación queda determinada cuando se conoce su grafo y el conjunto donde está definida, se designa frecuentemente el grafo y la relación con la misma letra.

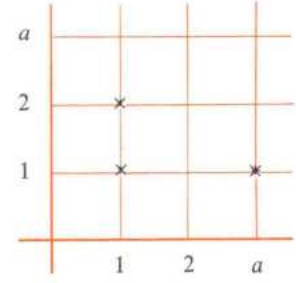
Ejemplos:

- Sea $A = \{1, 2, a\}$, entonces $R = \{(1, 1), (1, 2), (a, 1)\}$ es una relación en A.

  Al margen se han trazado el diagrama cartesiano de esta relación y su diagrama de flechas. (figuras 3 y 4)

- La relación $L\ldots$ *es menor o igual que*$\ldots$ en el conjunto $A = \{1, 2, 3\}$, viene definida por el siguiente conjunto de pares:

  $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$, en el que la primera componente de cada par es menor o igual que la segunda.



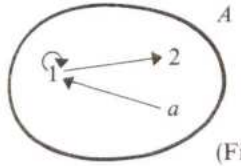
(Fig. 3)

8. Representa gráficamente la relación

$R = \{(1, 1), (1, 2), (b, 1), (c, 2), (b, 3), (c, 4)\}$

dada en el conjunto

$$M = \{1, 2, 3, a, b, c\}$$



(Fig. 4)

4 Propiedades usuales de las relaciones

Sea R una relación definida en un conjunto A.

Se dice que R es reflexiva si y sólo si $\Delta \subset R$, es decir, $\forall x \in A$, $(x, x) \in R$.

La igualdad de conjuntos es una relación reflexiva.

Se dice que R es simétrica si y sólo si $\forall x, y \in A$

$$(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$$

La relación de paralelismo entre rectas es simétrica, en cambio la relación $x \leqslant y$ en $\mathbb{N}$ no es simétrica.

Se dice que R es antisimétrica si y sólo si $\forall x, y \in A$

$$(x, y) \in R \text{ e } (y, x) \in R \Rightarrow x = y$$

La relación de inclusión es antisimétrica.

La relación: $x \leqslant y$, en $\mathbb{N}$ es antisimétrica.

Se dice que R es transitiva si y sólo si $\forall x, y, z \in A$

$$(x, y) \in R \text{ e } (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$$

Ejemplos:

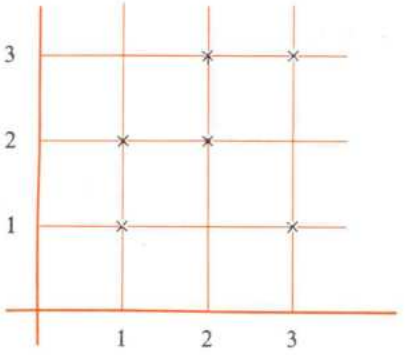
- Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y la relación R en A

  $$R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 3), (3, 1)\}$$

  En los pares de R y en su representación gráfica se observa que R es reflexiva, R es antisimétrica y R no es transitiva.

- La relación «x divide a y» en $\mathbb{N}$ es transitiva.

- La perpendicularidad de rectas no es transitiva.



R es reflexiva pues

$$\Delta = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}, \ \Delta \subset R$$

R *no* es simétrica pues

$$(1, 2) \in R \quad \text{pero} \quad (2, 1) \notin R$$

R es antisimétrica, pues las condiciones

$$(x, y) \in R$$
$$(y, x) \in R$$

no se cumplen en ningún caso, salvo para $x = y$.

R no es transitiva pues

$$(1, 2) \in R, \ (2, 3) \in R$$

y sin embargo

$$(1, 3) \notin R.$$

5 Relaciones de equivalencia

5.1. *Una relación R se dice que es de equivalencia si es reflexiva, simétrica y transitiva.*

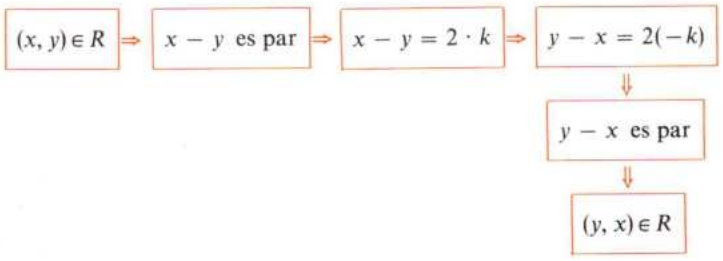
La relación formada por los pares de números enteros, cuya diferencia es par, es una relación de equivalencia como se prueba a continuación:

$R = \{(x, y)/x - y \text{ es par}\} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

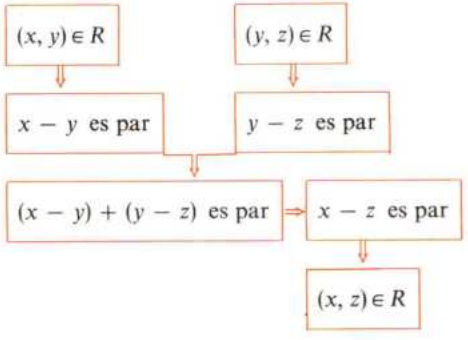
R es reflexiva, ya que $\forall x \in \mathbb{Z}$, $x - x = 0$, que es par, luego

$$\Delta = \{(x, x)/x \in \mathbb{Z}\} \subset R$$

R es simétrica pues



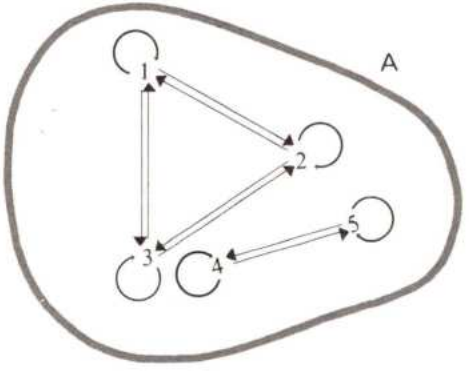
R es transitiva, como se prueba en el siguiente esquema:



5.2. Sea la relación R

$$R = \begin{Bmatrix} (1,1),\ (1,2),\ (1,3),\ (2,3),\ (2,1),\ (2,2) \\ (3,1),\ (3,2),\ (3,3),\ (4,5),\ (5,4),\ (4,4),\ (5,5) \end{Bmatrix}$$

definida en el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; se puede probar fácilmente que la relación R es de equivalencia; esto mismo prueba el siguiente diagrama de flechas:



9. Encuentra el menor número de pares que hay que agregar a la relación

$$R = \{(3, 3),\ (3, 5),\ (5, 3),\ (5, 9),\ (9, 7)\},$$

para que sea simétrica en el conjunto

$$A = \{3, 5, 7, 9\}$$

10. Un conjunto A tiene 25 elementos, ¿cual es el menor número de pares ordenados que debe tener una relación R definida en A, para que sea reflexiva? ¿Por qué?

11. Sea $X = \{a, b, c\}$ y $R = \{(a, a),\ (b, b),\ (c, c)\}$ Estudia las propiedades de R.

12. De todas las relaciones estudiadas indica cuáles son de equivalencia.

13. En el conjunto de las rectas del plano la relación $R = \{(r, s)/r \perp s\}$, ¿es de equivalencia?

5.3. *Conjunto cociente.*

Si R es una relación de equivalencia en el conjunto A, *se llama clase asociada a un elemento* x *de* A, *y se escribe* $[x]$, *al conjunto de todos los elementos de* A *que están relacionados con* x; es decir:

$$[x] = \{y \in A \mid (x, y) \in R\}$$

El conjunto de todas las clases de equivalencia se llama conjunto cociente de A por R y se representa por A/R.

En la relación R, presentada anteriormente en **5.2.**, se tiene:

$$[1] = \{1, 2, 3\}, [2] = \{3, 1, 2\}, [3] = \{3, 1, 2\}$$
$$[4] = \{4, 5\}, [5] = \{4, 5\}$$

Como $[1] = [2] = [3]$, y $[4] = [5]$ se tiene que el conjunto cociente es:

$$A/R = \{[1], [4]\}$$

14. Sea la relación $R = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (b, c), (c, b), (c, c), (d, f), (f, d), (f, f), (d, d), (a, c), (c, a)\}$ definida en el conjunto

$$A = \{a, b, c, d, f\}$$

Haz un diagrama de esta relación y comprueba que es de equivalencia.

Indica cuáles son las clases de equivalencia.

6 Relación de orden

Una relación R *en un conjunto* A, *se dice que es de orden, si es reflexiva, antisimétrica y transitiva.*

Sea U el conjunto de referencia; en el conjunto $\mathcal{P}(U)$ la relación de inclusión es de orden.

Una relación de orden, R, definida en un conjunto A, se llama relación *de orden total* si y sólo sí, cualesquiera que sean los elementos x, y de A, se tiene:

$$x \, R \, y \text{ o } y \, R \, x.$$

Cuando una relación no es de orden total se dice que es de *orden parcial.*

Ejemplo:

- *La relación de inclusión en* $\mathcal{P}(U)$ *no es de orden total, ya que puede haber dos subconjuntos de* U

$$A \subset U$$
$$B \subset U$$

Tales que las relaciones

$$A \subset B \quad \text{y} \quad B \subset A$$

sean ambas falsas.

15. Comprueba que la relación x divide a y, en el conjunto $A = \{1, 2, 4, 8\}$, es una relación de orden.

Haz el diagrama de flechas de esta relación. ¿Es una relación de orden total?

7 Aplicaciones

7.1. Sean A y B dos conjuntos. *Una aplicación f de A en B es una correspondencia de A en B tal que a todo elemento $x \in A$ le asocia un único elemento $y \in B$.*

Si f es una aplicación de A en B se escribe:

$$f : A \to B$$

A, se llama dominio, conjunto de definición de f o conjunto original, y B se llama codominio.

Las correspondencias f_1 y f_2 no son aplicaciones; f_3 es una aplicación. (Ver los diagramas.) Esta aplicación f_3 está determinada cuando se conocen A_3, B_3 y G_3, es decir, f_3 es la terna: $f_3 = (A_3, B_3, G_3)$.

Cuando se sobreentienden los conjuntos A_3 y B_3 se escribe simplemente

$$f_3 = G_3 = \{(a, 1),\ (b, 1),\ (c, 1),\ (d, 2),\ (e, 3)\}$$

7.2. Si $(x, y) \in f$, se escribe $y = f(x)$, y se dice que y es la imagen de x por f.

El conjunto formado por los elementos $y \in B$, que son imágenes de algún elemento $x \in A$, se llama *conjunto imagen* y se designa por $im(f)$ o $f(A)$.

7.3. Consideremos los conjuntos A y B

$A = \{1, 3, 5, 7\},\ B = \{4, 12, 20, 28, 32, 36\}$

y la aplicación $g : A \to B$ definida por

$$g = \{(1, 4),\ (3, 12),\ (5, 20),\ (7, 28)\}$$

La aplicación g, se puede definir también en este caso por una regla o fórmula que permita hallar la imagen de cada elemento de A.

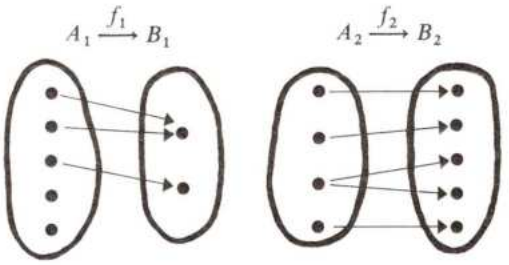
$$g : A \to B$$

$x \to 4 \cdot x$ o también $g(x) = 4x$

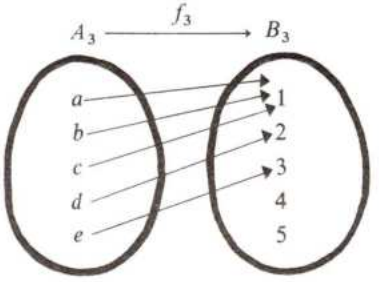
$1 \to 4 \cdot 1 = 4 \qquad g(5) = 4 \cdot 5 = 20$

$3 \to 4 \cdot 3 = 12 \qquad g(7) = 4 \cdot 7 = 28$

En este caso el conjunto imagen es $g(A) = \{4, 12, 20, 28\}$



f_1 y f_2 no son aplicaciones



$f_3 : A_3 \longrightarrow B_3$

$G_3 = \{(a, 1),\ (b, 1),\ (c, 1),\ (d, 2),\ (e, 3)\}$

f_3 es una aplicación de A_3 en B_3

$f_3(a) = 1; \quad f_3(b) = 1; \quad f_3(c) = 1$

$f_3(d) = 2; \quad f_3(e) = 3$

16. Sean $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b, c\}$ y la correspondencia $f = \{(1, a),\ (1, b),\ (2, c),\ (3, c)\}$

¿Es f aplicación?

17. Indica cuáles de las siguientes correspondencias son aplicaciones:

$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$; $h : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$

$x \to x + 3$; $x \to 2/3x$

$g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$; $k : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$

$x \to x - 3$; $x \to (x - 1)/6$

Calcula:

$f(0); \quad g(1); \quad h(-2); \quad k(3)$

7.4. *Sucesión de números racionales.*

Una sucesión de números racionales es una aplicación de $\mathbb{N}^*$ *en* $\mathbb{Q}$.

Así la aplicación:

$$f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{Q}$$
$$n \to (-1)^n$$

asocia a un número natural n cualquiera el 1 o el -1, según sea n par o impar.

La siguiente ordenación de las imágenes

$$-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$$

también se llama sucesión.

La siguiente aplicación de $\mathbb{N}^*$ en $\mathbb{Q}$ es una sucesión de números racionales

$$\mathbb{N}^* \to \mathbb{Q}$$
$$a_n \to 2n + 1 \qquad a_n = 2n + 1$$

En esta notación se entiende que a_1 es la imagen de 1, a_2 es la imagen de 2, etc.

$$a_1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$$
$$a_2 = 2 \cdot 2 + 1 = 5$$
$$a_3 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$
$$\mathbb{Q} = \{\text{números racionales}\}$$
$$f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{Q}$$
$$n \to (-1)^n$$
$$1 \to (-1)^1 = -1$$
$$2 \to (-1)^2 = 1$$
$$3 \to (-1)^3 = -1$$
$$4 \to (-1)^4 = 1$$

18. En la siguiente sucesión de números racionales, indica cuáles son las imágines de 4 y de 5. Señala también el término a_2.

0,3; 0,33; 0,333; 0,3333; 0,33333; 0,333333, ...

19. Escribe 12 términos de las sucesiones siguientes:

$$\mathbb{N} \to \mathbb{Q}^*$$

a) $a_n = 2n + 1$

b) $b_n = 3n - 2$

c) $c_n = \dfrac{1}{n}$

d) $d_n = \dfrac{2}{n^2}$

8 Tipos de aplicaciones

8.1. Sea $f : A \to B$ una aplicación.

Si cada elemento de B, que es imagen de uno de A, lo es de uno sólo, la aplicación es inyectiva, es decir, cada elemento y de B es imagen de 0 ó 1 elemento de A, o también f es inyectiva si y sólo sí $\forall (x, y) \in A \times A$ se verifica:

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

8.2. *Si todo elemento de B es imagen de uno de A se dice que la aplicación es suprayectiva o exhaustiva;* también se dice que se ha aplicado A sobre B; es decir, f es suprayectiva si y sólo si

$$\forall y \in B, \quad \exists x \in A \quad \text{tal que } y = f(x)$$

Ejemplos:

- Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $f(x) = 2x$.

  Probemos que f es inyectiva

$$f(x) = f(y) \Downarrow 2x = 2y \Rightarrow x = y$$

- Sea $y \in \mathbb{N}$; para averiguar si f es suprayectiva, habrá que ver si existe algún $x \in \mathbb{N}$ tal que $f(x) = y$. Como $f(x) = 2x = y$ se sigue que si y es impar no existe tal $x \in \mathbb{N}$, luego f no es suprayectiva.

- Sea $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida por $f(x) = x - 3$

  entonces

$$f(x) = f(y) \to x - 3 = y - 3 \Rightarrow x = y$$

  luego f es inyectiva.

8.3. *Si todo elemento de B es imagen de un solo elemento de A, se dice que la aplicación f es biyectiva o que f es una biyección;* o también: *f es biyectiva si f es a la vez inyectiva y suprayectiva.*

8.4. Obsérvese que la correspondencia recíproca de una aplicación no es generalmente una aplicación.

Así la aplicación

$$f : E \to F$$
$$E = \{1, 2, 3, 4\}$$
$$F = \{a, b, c\}$$

definida por

$$G = \{(1, a),\ (2, c),\ (3, c),\ (4, c)\}$$

tiene por recíproca

$$f^{-1} = (E, F, G^*)$$

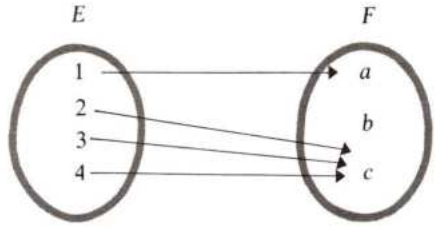
donde

$$G^* = \{(a, 1),\ (c, 2),\ (c, 3),\ (c, 4)\}$$

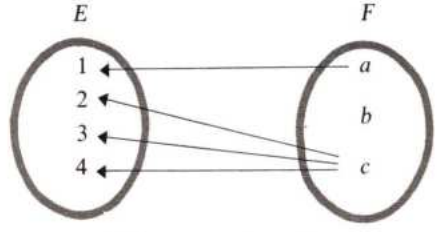
y f^{-1} no es aplicación, como se observa en el diagrama correspondiente.

20. Haz el diagrama de flechas de una aplicación inyectiva entre dos conjuntos finitos A y B y comprueba que el conjunto inicial tiene el mismo número de elementos que el conjunto imagen, es decir:

$$\text{card}\,(A) = \text{card}\,(f(A))$$



f es aplicación



f^{-1} no es aplicación

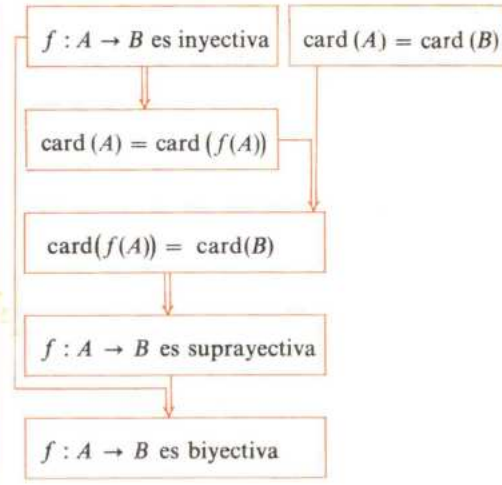
8.5. Toda aplicación inyectiva entre dos conjuntos finitos de igual cardinal es también biyectiva.

En efecto: Sea $f : A \to B$ una aplicación inyectiva con $\text{card}(A) = \text{card}(B) = n$.

Por ser f inyectiva será $\text{card}(A) = \text{card}(f(A))$; luego

$$\text{card}(A) = \text{card}(f(A)) = \text{card}(B).$$

La última igualdad nos dice que f es suprayectiva y, por tanto, f es biyectiva.



9 Igualdad de aplicaciones

Sean f y g dos aplicaciones de A en B

$$f : A \to B; \quad g : A \to B$$

Se dice que f y g son iguales cuando actúan de igual forma sobre los elementos del dominio

$$f = g \Leftrightarrow \forall x \in A,\ f(x) = g(x)$$

10 Operación interna

Sea el conjunto $E = \{a, b, c\}$. El producto cartesiano $E \times E$ es:

$$E \times E = \{(a, a),\ (a, b),\ (a, c),\ (b, a),\ (b, b),\ (b, c),\ (c, a),\ (c, b),\ (c, c)\}$$

El diagrama representa una aplicación de $E \times E$ en E.

Una aplicación de $E \times E$ en E es una ley de composición interna o una operación interna en el conjunto E.

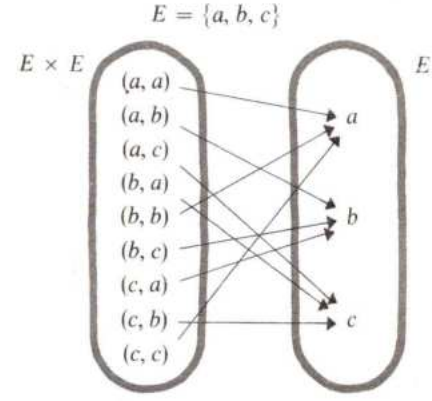
Para expresar que la imagen del par (a, b), mediante la aplicación $\perp$, es b, se escribe:

$$\perp(a, b) = b$$

Para las aplicaciones que, como la anterior, son operaciones se usa preferentemente la siguiente notación:

$$a \perp b = b$$

componente primera o de la izquierda. componente segunda o de la derecha.



$\perp(a, c) = c$; $a \perp c = c$

$\perp(b, a) = c$; $b \perp a = c$

$\perp(c, a) = b$; $c \perp a = b$

La aplicación $\perp$ se puede representar en una tabla.

En la casilla correspondiente a la columna del elemento a y a la fila del elemento b se escribe la imagen del par (a, b), es decir, b.

De este modo se ha construido la tabla del margen llamada tabla de la operación interna.

2.ª componente \ 1.ª componente	$\perp$	a	b	c
	a	a	c	b
	b	b	a	c
	c	c	b	a

Tabla de la operación interna $\perp$

11 Propiedades de las operaciones

11.1. Sea A un conjunto y $\perp$ una operación interna definida en A. Se dice que $\perp$ es *asociativa* cuando cualesquiera que sean a, b y c, elementos de A, se verifica:

$$a \perp (b \perp c) = (a \perp b) \perp c$$

Sea $\mathbb{Z} = A$. Consideremos la operación $x \perp y = x - y$; entonces $\perp$ *no* es asociativa ya que $3 \perp (2 \perp 1) \neq (3 \perp 2) \perp 1$ como se prueba al margen.

$3 \perp (2 \perp 1) = 3 \perp (2 - 1) = 3 \perp 1 = 3 - 1 = 2$

$(3 \perp 2) \perp 1 = (3 - 2) \perp 1 = 1 \perp 1 = 1 - 1 = 0$

$3 \perp (2 \perp 1) \neq (3 \perp 2) \perp 1$

11.2. Se dice que $\perp$ es *conmutativa* cuando cualesquiera que sean a y b se verifica:

$$a \perp b = b \perp a$$

es decir,

$\perp$ es conmutativa $\Leftrightarrow \forall a, b \in A$ se verifica: $a \perp b = b \perp a$

La operación definida por $x \perp y = x - y$ no es conmutativa, ya que

$$2 \perp 0 = 2 - 0 = 2$$
$$0 \perp 2 = 0 - 2 = -2$$

11.3. Se dice que $\perp$ *posee elemento neutro* si existe un elemento $e \in A$ tal que $\forall x \in A$ se verifica:

$$x \perp e = e \perp x = x$$

La operación definida anteriormente por $x \perp y = x - y$ no posee elemento neutro, pues, si lo tuviera debería ser:

$$x \perp e = x - e = x \Rightarrow e = 0,$$

como debe ser $e \perp x = x$ se tiene $0 \perp 3 = 0 - 3 \neq 3$; luego $e = 0$ no vale como elemento neutro.

21. En $\mathbb{Q}$ se define la operación

$$x \perp y = \frac{x + y}{2}$$

¿Es asociativa? ¿Es conmutativa? ¿Posee elemento neutro?

22. En $\mathbb{Z}$ se define $x \perp y = x + y - 3$.

¿Es $\perp$ una operación interna? En caso afirmativo estudiarla.

Estudia esta misma operación en $\mathbb{N}$.

11.4. Sea $\perp$ una operación interna sobre A, tal que existe elemento neutro e.

Se dice que x y x' *son simétricos* cuando

$$x \perp x' = x' \perp x = e.$$

Ejemplo:

- En $\mathbb{Z}$ el simétrico de un entero a, con respecto a la suma, es su opuesto $(-a)$, ya que $a + (-a) = 0$ (elemento neutro).

12 Distributividad entre dos operaciones internas

Sea A un conjunto, $\perp$ y $\blacktriangle$ dos operaciones internas sobre A.

Se dice que la operación $\blacktriangle$ es *distributiva*, respecto a la operación $\perp$, si se verifica:

$$\forall\, a, b, c \in A : a \blacktriangle (b \perp c) = (a \blacktriangle b) \perp (a \blacktriangle c)$$

Así en $\mathscr{P}(U)$ la intersección es distributiva respecto a la unión; en este caso también la unión es distributiva respecto a la intersección. En $\mathbb{Z}$, la multiplicación es distributiva respecto a la adición.

Sin embargo, la adición no es distributiva respecto a la multiplicación, como se indica en el esquema de la derecha.

$A,\ B,\ C \in \mathscr{P}(U)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$a,\ b,\ c \in \mathbb{Z}$

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

$3 + (2 \cdot 5) = 3 + 10 = 13$

$(3 + 2) \cdot (3 + 5) = 5 \cdot 8 = 40$

$3 + (2 \cdot 5) \neq (3 + 2) \cdot (3 + 5)$

En $\mathbb{Z}$ la adición no es distributiva respecto de la multiplicación

13 Estructuras algebraicas

Todo conjunto A provisto de una o varias operaciones recibe el nombre de *estructura algebraica.*

13.1. *Semigrupo.*

Un par $(A, \perp)$, donde A es un conjunto y $\perp$ una operación interna sobre A, se dice que es un *semigrupo* si $\perp$ es asociativa.

Si además $\perp$ es conmutativa $(A, \perp)$ se llama *semigrupo conmutativo*, si además $\perp$ posee elemento neutro $(A, \perp)$ se llama *semigrupo conmutativo* con *elemento neutro.*

Ejemplo:

- $(\mathbb{Z}, \cdot)$ es un semigrupo conmutativo con elemento neutro.

Si $a, b, c \in \mathbb{Z}$
$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \ ;\ a \cdot b = b \cdot a \ ;\ a \cdot 1 = a$

$(\mathbb{Z}, \cdot)$ es un semigrupo conmutativo con elemento neutro

13.2. *Grupo.*
Un par $(G, \perp)$, donde G es un conjunto y $\perp$ es una operación interna sobre G, se dice que es un *grupo* si se verifica:

1.º $\perp$ es asociativa.

2.º Existe elemento neutro para $\perp$.

3.º Todo elemento posee simétrico.

Si además $\perp$ es conmutativa el grupo se llama *abeliano* o *conmutativo*.

Ejemplo:

- El par $(\mathbb{Z}, +)$ es un grupo abeliano.
- El par $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$, donde $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}$, es un grupo abeliano.

13.3. Consideremos un conjunto A, en el que se ha definido una operación interna $(\perp)$. En el cuadro siguiente, se resumen las estructuras de *semigrupo* y *grupo*.

La adición en $\mathbb{Z}$ es asociativa. Si $a, b, c \in \mathbb{Z}$; $a + (b + c) = (a + b) + c$

Existe elemento neutro para $+$ que es el 0 ya que $a + 0 = a$

Todo entero a posee un opuesto $-a$, ya que $a + (-a) = 0$

La adición en $\mathbb{Z}$ es conmutativa $a + b = b + a$; $\forall a, b \in \mathbb{Z}$

$(\mathbb{Z}, +)$ es un grupo abeliano

CONJUNTO A						
$a \in A$ $b \in A$ $c \in A$ $e \in A$		OPERACION INTERNA $(\perp)$	$(A, \perp)$ es un **semigrupo**	$(A, \perp)$ es un **semigrupo con elemento neutro**	$(A, \perp)$ es un **grupo**	$(A, \perp)$ es un **grupo abeliano**
PROPIEDADES	**Asociativa**	$a \perp (b \perp c) = (a \perp b) \perp e$				
	Elemento neutro e	$a \perp e = e \perp a = a$				
	Todo elemento a **tiene un simétrico** a'	$a \perp a' = a' \perp a = e$				
	Conmutativa	$a \perp b = b \perp a$				

13.4. *Anillo.*

Una terna $(A, \perp, \blacktriangle)$ donde A es un conjunto, $\perp$ y $\blacktriangle$ dos operaciones internas sobre A, se dice que es un *anillo* si:

1.° $(A, \perp)$ es un grupo abeliano.

2.° $(A, \blacktriangle)$ es un semigrupo.

3.° $\blacktriangle$ es distributiva respecto de $\perp$.

Ejemplos:

- $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ y $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, donde $+$ y $\cdot$ representan la adición y multiplicación usuales de enteros y racionales respectivamente, son anillos.

- Si en el anillo $(A, \perp, \blacktriangle)$, la operación $\blacktriangle$ posee elemento neutro, el anillo se dice que es unitario; si además $\blacktriangle$ es conmutativa, $(A, \perp, \blacktriangle)$ es un *anillo unitario y conmutativo* o un *anillo conmutativo con elemento unidad.*

13.5. *Cuerpo.*

Un anillo $(A, \perp, \blacktriangle)$ tal que todo elemento $x \in A$, $x \neq e$ (elemento neutro de $\perp$) tenga simétrico para $\blacktriangle$, se dice que es un *cuerpo.*

Es decir, *un cuerpo es un anillo unitario en el cual todo elemento, excepto el neutro de la primera operación, posee simétrico respecto a la segunda.*

Si la segunda operación es conmutativa, el cuerpo se llama conmutativo. Así $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ es un cuerpo conmutativo.

Nota: En este curso se estudiarán los siguientes anillos y cuerpos:

El anillo de los polinomios en una indeterminada.

El anillo de las funciones reales de variable real.

El anillo de las funciones polinómicas.

El cuerpo de los números reales.

El cuerpo de las razones algebraicas.

El cuerpo de los números complejos.

23. Prueba que el conjunto $A = \{1, -1\}$ con la operación multiplicación de números enteros en un grupo.

Haz la tabla de la operación.

¿Es conmutativo este grupo?

24. En el conjunto $A = \{0, 1, 2\}$ se definen las operaciones de adición y multiplicación que se indican en las siguientes tablas:

$+$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$\cdot$	1	2
1	1	2
2	2	1

1.° ¿Son $+$ y $\cdot$ operaciones internas en A?

2.° Comprueba con ejemplos que $+$ y $\cdot$ son operaciones asociativas.

3.° ¿Cuáles son los elementos neutros de ambas operaciones?

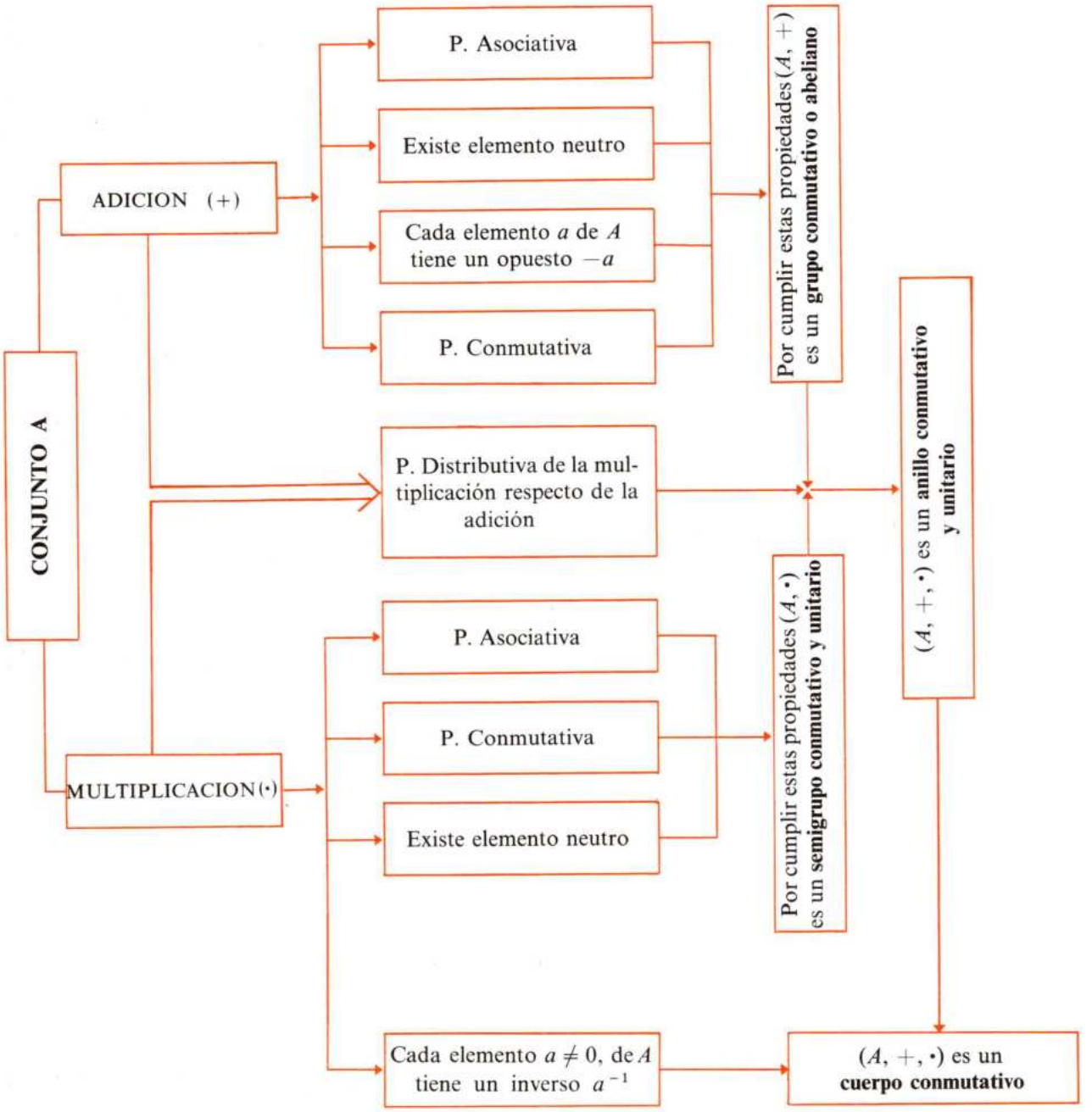
4.° ¿Qué estructura tienen

a) El par $(A, +)$

b) El par $(A^*, \cdot)$, $A^* = A - \{0\}$

c) ¿Qué estructura tiene la terna $(A, +, \cdot)$?

13.6. Sea A un conjunto en el que se han definido dos operaciones internas $(+)$ y $(\cdot)$. En el esquema siguiente se resumen las condiciones para la terna $(A, +, \cdot)$ sea un anillo o un cuerpo.



Ejercicios y cuestiones

25. Considera los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$; $B = \{3, 4, 5\}$ y $C = \{4, 5, 6\}$ y calcula:

- $A \times B$
- $A \times (B \cup C)$
- $A \times (B - C)$
- $B \times C$
- $(A \times B) \cup (A \times C)$
- $(A \times B) - (A \times C)$

26. ¿Tiene el producto cartesiano la propiedad conmutativa? Demuéstralo con un ejemplo.

27. ¿Cómo han de ser A, B para que $A \times B = \varnothing$?

28. Sean dos conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$; $B = \{1, 2, 3\}$ y $G = \{(a, 2), (b, 1), (c, 2), (d, 1), (c, 3)\}$ un subconjunto de $A \times B$. Representa gráficamente la correspondencia determinada por G entre A y B.

29. Sea $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ el grafo de una relación establecida en el conjunto $A = \{1, 2, 3\}$. Representa gráficamente la relación y di qué propiedades tiene.

30. En el conjunto de las rectas de un plano se establece la relación «ser paralela a». ¿Qué clase de relación es?

31. En el conjunto de las rectas de un plano se establece la relación «ser perpendicular a». ¿Qué propiedades cumple?

32. Considera el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Halla $A \times A$. En $A \times A$ se establece la relación $(x, y)\, R(z, u)$ si $x + u = y + z$. ¿Qué clase de relación es? Determina el conjunto cociente.

33. Sea el conjunto $A = \{a, b, c\}$. Halla $\mathcal{P}(A)$. En $\mathcal{P}(A)$ establece la relación XRY si $X \subset Y$. ¿Qué clase de relación es?

34. Representa una correspondencia entre $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$ que sea aplicación. ¿Es aplicación inyectiva? ¿Por qué? ¿Es aplicación suprayectiva? ¿Es una biyección?

35. En el conjunto $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ se considera la relación R

$R = (1, 1), (1, 3), (1, 5), (3, 1), (3, 5), (3, 3), (5, 1), (5, 3), (5, 5), (7, 9), (9, 7), (7, 7), (9, 9)\}$

Haz el diagrama de flechas de esta relación y comprueba que se trata de una relación de equivalencia. ¿Cuántos elementos distintos tiene el conjunto cociente?

36. Se define la correspondencia $f : A \to B$

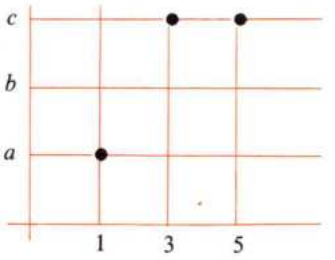
$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\} \quad \text{y} \quad B = \{6, 8, 10, 12, 14, 16\}$$

del modo siguiente: $f(x) = x + 5$. ¿Cuál es el conjunto imagen? ¿Qué tipo de correspondencia es f?

37. ¿Cuál es la correspondencia recíproca de f? ¿Es aplicación f^{-1}?

38. La representación gráfica de una correspondencia $f : A \to B$ es la siguiente:

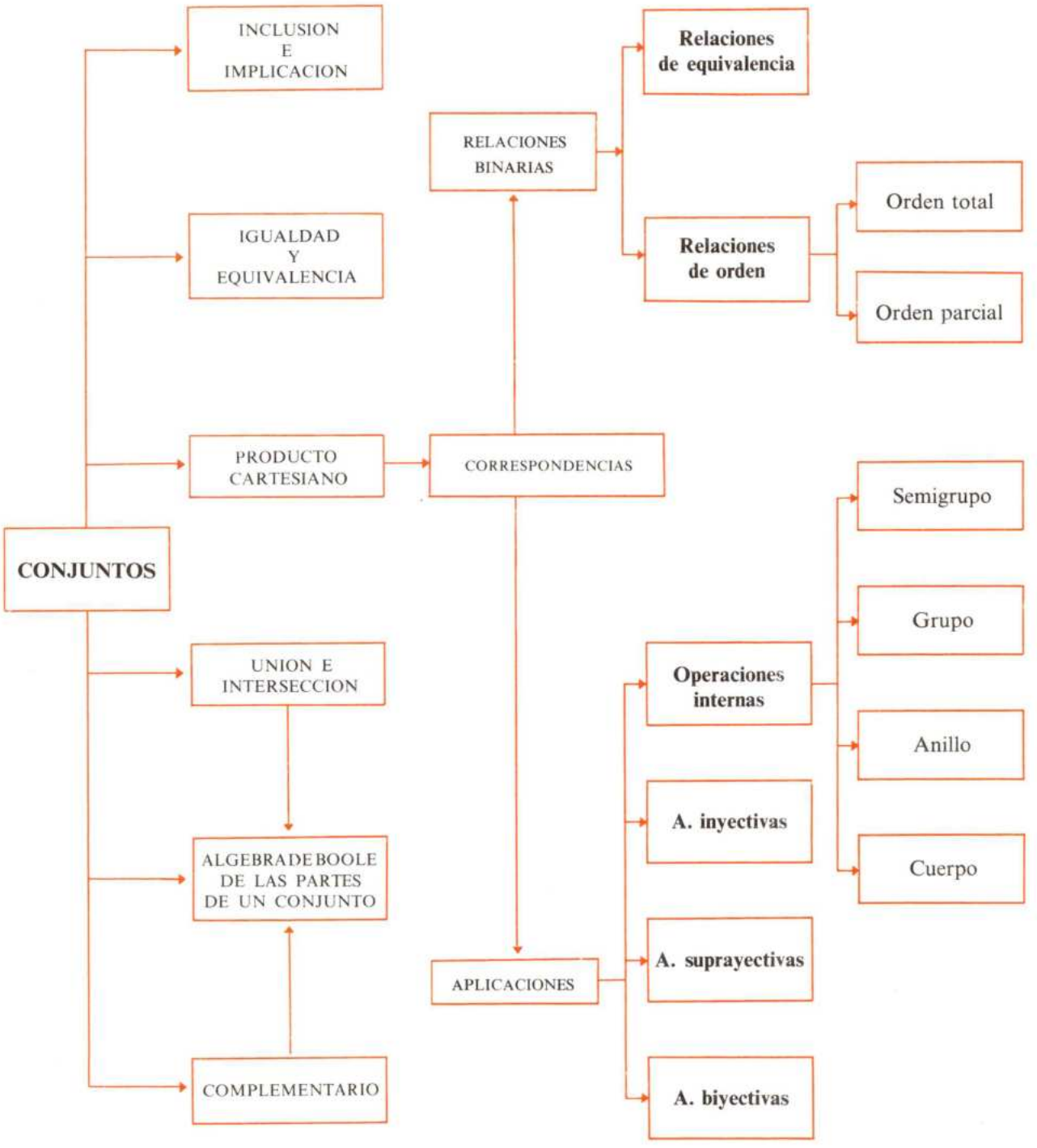
$$A = \{1, 3, 5\} \quad \text{y} \quad B = \{a, b, c\}$$



Escribe los pares que definen f y los pares que definen la correspondencia recíproca f^{-1} de f. ¿Qué tipo de correspondencia son f y f^{-1}?

DIAGRAMA ESTRUCTURAL DE LA UNIDAD

CONJUNTOS. CORRESPONDENCIAS



Unidad 2

COMBINATORIA

La necesidad de contar debió de aparecer pronto en el hombre; pero la humanidad no cubrió esta necesidad de modo satisfactorio hasta la invención del número.

En esta sección aprenderás a contar posibilidades. ¿De cuántas maneras puede elegirse un conjunto de ciertas características? ¿De cuántas maneras puede ordenarse un conjunto dado?

¿Cuántas quinielas diferentes se pueden hacer en una jornada de liga en la que intervienen 12 encuentros?

¿De cuántos modos diferentes se pueden repartir tres premios entre varios candidatos?

En los temas que siguen aprenderás a resolver los problemas anteriores, y otros, en los que es fundamental saber formar agrupaciones dentro de un conjunto dado con arreglo a ciertos criterios, y a calcular el número de tales agrupaciones.

En el tema 3 (primer tema de esta Unidad) se estudian los números factoriales y los números combinatorios.

Los temas 4, 5 y 6 se dedican al estudio de las variaciones, permutaciones y combinaciones, respectivamente.

El estudio de las variaciones y permutaciones, ordinarias y con repetición, se hace a partir de las aplicaciones; esta noción de aplicación, una de las más importantes de la matemática, permite unificar el tratamiento de toda la combinatoria, sin embargo, no se olvidan los enfoques tradicionales de estos temas.

Tema 3

1. Números factoriales.
2. Números factoriales generalizados.
3. Números combinatorios.
4. Propiedades de los números combinatorios.
5. Triángulo de Tartaglia.

Tema 4

1. Número de aplicaciones entre dos conjuntos finitos.
2. Variaciones con repetición.
3. Númerode aplicaciones inyectivas entre dos conjuntos finitos.
4. Variaciones ordinarias.

Tema 5

1. Número de aplicaciones biyectivas entre dos conjuntos finitos.
2. Permutaciones.
3. Permutaciones con repetición.

Tema 6

1. Subconjuntos: su formación y número.
2. Combinaciones.

Tema 3

NUMEROS COMBINATORIOS

En este tema se estudian los números combinatorios a partir de los números factoriales y de los números factoriales generalizados.

Los números combinatorios aparecen con frecuencia en la matemática de un modo formal, es decir, aparecen al considerar la forma de ciertas expresiones; por eso, parece razonable estudiar estos números y sus propiedades, fuera del marco habitual de las combinaciones.

1 Números factoriales

1.1. Muchas veces aparecen en la matemática productos de la forma

$$1\cdot 2;\quad 1\cdot 2\cdot 3;\quad 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4;\quad 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots \cdot n$$

Se trata en cada caso del producto de varios números naturales consecutivos a partir del 1.

Estos productos se escriben abreviadamente:

$$2!;\quad 3!;\quad 4!;\quad n!$$

Los números naturales dados por 2!, 3!, 4! se llaman *números factoriales.*

Definición: *Si n es un número natural mayor que* 1 *se llama «factorial de n», y se simboliza por n!, al producto de los n primeros números naturales no nulos.*

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots \cdot (n-2)\cdot (n-1)\cdot n$$

$1\cdot 2 = 2!$ se lee: Factorial de 2

$1\cdot 2\cdot 3 = 3!$ se lee: Factorial de 3

$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 4!$ se lee: Factorial de 4

$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 \ldots n = n!$ se lee: Factorial de n, y también «n factorial».

1.2. De la definición de factorial se deducen las siguientes propiedades de los factoriales:

$$n!\cdot (n+1) = (n+1)! \quad [1]$$

Ejemplos:

- $7!\cdot 8 = 8!$; $10!\cdot 11 = 11!$; $12!\cdot 13 = 13!$

$$k!\cdot (k+1)\cdot (k+2)\cdot \ldots \cdot (n-2)\cdot (n-1)\cdot n = n! \quad [2]$$

- $4!\cdot 5\cdot 6\cdot 7 = 7!$; $9!\cdot 10\cdot 11\cdot 12 = 12!$; $13!\cdot 14\cdot 15 = 15!$

Demostremos las propiedades [1] y [2], aplicando la definición de factorial, y la propiedad asociativa de la multiplicación de números naturales

$$n! \cdot (n+1) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n \cdot (n+1) = (n+1)! \quad [1]$$

De esta propiedad se deduce que $\dfrac{(n+1)!}{n!} = n+1$

Ejemplo:

- $\dfrac{5!}{4!} = 5; \quad \dfrac{9!}{8!} = 9$

$$k! \cdot (k+1) \cdot (k+2) \cdot \ldots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n =$$
$$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k \cdot (k+1) \cdot (k+2) \cdot \ldots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n = n! \quad [2]$$

1.3. Todo producto tiene al menos dos factores, por eso, los símbolos 0! y 1! carecen de sentido.

Para que las fórmulas en las que aparecen factoriales sean aplicables en todos los casos, conviene extender la definición de número factorial para $n = 1$ y $n = 0$, admitiendo que $0! = 1$ y $1! = 1$.

1. Calcula los números factoriales 4!, 5!, 10!

2. Si conoces el número factorial $5! = 120$ calcula, sin desarrollarlo, el número factorial 6!

3. El número 720 es el factorial de un número, ¿cuál es éste?

4. Comprueba que $7! = 6! \cdot 7$; $10! = 9! \cdot 10$

5. Comprueba que $3! \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 6!$

6. Te dan la relación $x! \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 9!$ Halla x.

7. Calcula:

$$\frac{8!}{7!} \; ; \; \frac{7!}{6!} \; ; \; \frac{(x+1)!}{x!} \; ; \; \frac{n!}{(n-1)!}$$

2 Números factoriales generalizados

2.1. Consideremos los siguientes productos de números naturales:

$$9 \cdot 8; \quad 9 \cdot 8 \cdot 7; \quad 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$$

Se trata en cada caso, del producto de números naturales consecutivos en orden decreciente a partir del 9.

Estos productos se escriben abreviadamente:

$$9^{(2)}; \quad 9^{(3)}; \quad 9^{(4)}$$

Los números naturales dados por $9^{(2)}$, $9^{(3)}$, $9^{(4)}$ ... se llaman *números factoriales generalizados* de 9.

Definición: *Sean n y k dos números mayores que 1, y $n \geqslant k$. Se llama número factorial generalizado de n de orden k, y se designa por $n^{(k)}$, al producto de k factores consecutivos decrecientes a partir de n.*

Ejemplos:

- $n^{(2)} = n \cdot (n-1)$
- $n^{(3)} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2)$
- $n^{(4)} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)$

$9 \cdot 8 = 9^{(2)}$ se lee:
«Factorial generalizado de 9 de orden 2»

$9 \cdot 8 \cdot 7 = 9^{(3)}$ se lee:
«Factorial generalizado de 9 de orden 3»

$9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 9^{(4)}$ se lee:
«Factorial generalizado de 9 de orden 4»

Se observa que:

Cuando hay dos factores, el último factor es:

$$n - 1 = n - 2 + 1$$

Cuando hay tres factores, el último factor es:

$$n - 2 = n - 3 + 1$$

En general, si hay h factores, el último será $n - h + 1$ luego:

$$n^{(h)} = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot (n - 3) \cdot \ldots \cdot (n - h + 1)$$

2.2. Entre las propiedades de los números factoriales generalizados destacaremos las siguientes:

$$n^{(n)} = n! \qquad [1]$$

$$n^{(n-h)} \cdot h! = n! \qquad [2]$$

$$n^{(h)} \cdot (n - h)! = n! \qquad [3]$$

$$n^{(h)} \cdot (n - h) = n^{(h+1)} \qquad [4]$$

$$n^{(h)} \cdot (n + 1) = (n + 1)^{(h+1)} \qquad [5]$$

2.3. Demostraciones:

[1] Aplicando la definición de número factorial generalizado resulta: $n^{(n)} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$

Ejemplos:

- $3^{(3)} = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$
- $5^{(5)} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5!$

[2] Aplicando las definiciones de número factorial y de factorial generalizado resulta: $n^{(n-h)} \cdot h! =$

$$= n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-(n-h)+1) \cdot h \cdot (h-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 =$$

$$= n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \ldots \cdot (h + 1) \cdot h \cdot (h - 1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Ejemplos:

- $9^{(9-3)} \cdot 3! = 9^{(6)} \cdot 3! = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 9!$
- $12^{(12-5)} \cdot 5! = 12!$

[3] Teniendo en cuenta las definiciones de números factoriales y factoriales generalizados resulta: $n^{(h)} \cdot (n - h)! =$

$$= n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-h+1) \cdot (n-h) \cdot (n-h-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Ejemplos:

- $5^{(2)} \cdot (5 - 2)! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5!$
- $8^{(3)} \cdot (8 - 3)! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 8!$

8. Calcula los números factoriales generalizados $9^{(4)}$, $8^{(2)}$, $10^{(3)}$.

9. El número 72 es un número factorial generalizado de orden 2, ¿de qué número?

10. Te dan el número factorial generalizado $567^{(45)}$. ¿Cuál es el factor más pequeño?

11. El número factorial generalizado $6^{(6)}$ se puede escribir de otra forma, ¿cuál? (Basta que hagas el desarrollo de 6!)

12. Comprueba que $9^{(3)} \cdot (9 - 3) = 9^{(4)}$.

13. Calcula h si se verifica la relación

$$12^{(h)} \cdot (12 - 5) = 12^{(6)}$$

14. Comprueba que $7^{(5)} \cdot (7 - 5) = 7!$

15. Escribe todos los números factoriales generalizados de 7 que sepas.

[4] $n^{(h)} \cdot (n-h) \overset{①}{=} n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots (n-h+1) \cdot (n-h) \overset{②}{=} n^{(h+1)}$

En ① y en ② se ha utilizado la misma definición. ¿Cuál es?

Ejemplos:

- $5^{(3)} \cdot (5-3) = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 5^{(4)}$
- $12^{(5)} \cdot (12-5) = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 12^{(6)}$

[5] Indíquese qué definiciones se aplican en cada signo *igual*

$$n^{(h)} \cdot (n+1) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-h+1) \cdot (n+1) =$$
$$= (n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-h+1) = (n+1)^{(h+1)}$$

Ejemplos:

- $7^{(3)} \cdot (7+1) = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot (7+1) = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 8^{(4)} = (7+1)^{(3+1)}$
- $8^{(4)} \cdot (8+1) = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot (8+1) = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 9^{(5)} = (8+1)^{(4+1)}$

2.4. Todo producto tiene al menos dos factores, por eso, los símbolos $n^{(0)}$ y $n^{(1)}$ carecen de sentido. Para que las fórmulas en las que aparecen factoriales sean aplicables en todos los casos conviene extender la definición de número factorial generalizado para $h = 1$ y $h = 0$ admitiendo que

$$n^{(0)} = 1; \quad n^{(1)} = 1$$

3 Números combinatorios

3.1. Consideremos los siguientes cocientes entre productos de números naturales:

$$\frac{9 \cdot 8}{1 \cdot 2}, \quad \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \quad \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}, \quad \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}, \quad \ldots$$

Con ayuda de los números factoriales y de los números factoriales generalizados, los cocientes anteriores se pueden escribir así:

$$\frac{9^{(2)}}{2!}, \quad \frac{9^{(3)}}{3!}, \quad \frac{9^{(4)}}{4!}, \quad \frac{9^{(5)}}{5!}, \quad \ldots$$

Estos cocientes reciben el nombre de *números combinatorios* y se representan simbólicamente del modo siguiente:

$$\binom{9}{2}, \quad \binom{9}{3}, \quad \binom{9}{4}, \quad \binom{9}{5}, \quad \ldots$$

se lee: «9 sobre 2», «9 sobre 3», «9 sobre 4», «9 sobre 5», ...

16. Calcula los siguientes números combinatorios:

$$\binom{9}{3} \; ; \; \binom{8}{5} \; ; \; \binom{6}{2} \; ; \; \binom{10}{3}$$

17. Comprueba que se verifica la siguiente relación:

$$\binom{7}{2} = \binom{7}{5}$$

Ejemplos:

- $\binom{5}{2} = \frac{5^{(2)}}{2!} = \frac{5 \times 4}{1 \times 2} = \frac{20}{2} = 10$
- $\binom{7}{3} = \frac{7^{(3)}}{3!} = \frac{7 \times 6 \times 5}{1 \times 2 \times 3} = 7 \times 5 = 35$

Por tanto, los números combinatorios se pueden definir a partir de los números factoriales generalizados y de los números factoriales del siguiente modo:

Definición: *Sean n y k dos números naturales. Se llama número combinatorio «n sobre k», y se designa por $\binom{n}{k}$, al cociente* $\frac{n^{(k)}}{k!}$

$$\binom{n}{k} = \frac{n^{(k)}}{k!}$$

Los números n y k se llaman respectivamente numerador y denominador del número combinatorio.

Es evidente que siendo $n^{(k)}$ un número factorial generalizado n es mayor o igual que k. Dicho de otro modo: *El numerador de un número combinatorio es mayor o igual que el denominador.*

18. Calcula los números combinatorios:

$$\binom{3}{1} \; ; \; \binom{6}{1} \; ; \; \binom{8}{1}$$

19. Halla los valores de los números combinatorios:

$$\binom{3}{0} \; ; \; \binom{6}{0} \; ; \; \binom{8}{0}$$

20. Comprueba la siguiente relación:

$$\binom{7}{2} + \binom{7}{3} = \binom{8}{3}$$

4 Propiedades de los números combinatorios

4.1. $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

En efecto:

$$\binom{n}{k} = \frac{n^{(k)}}{k!} = \frac{n^{(k)} \cdot (n-k)!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Por definición de $\binom{n}{k}$

Por la propiedad [3] de los números factoriales generalizados.

Multiplicando numerador y denominador por $(n-k)!$

Ejemplo:

- $\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7!}{3!\,4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{3!\,4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} = 35$

21. Aplicando la fórmula de **4.1.**, calcula:

$$\binom{8}{2}; \; \binom{8}{6}; \; \binom{9}{5}; \; \binom{9}{4}$$

4. 2. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

o de otro modo, si $k + h = n$, entonces $\binom{n}{k} = \binom{n}{h}$

Aplicando la propiedad anterior resulta:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Ejemplos:

- $\binom{5}{2} = \binom{5}{5-2} = \binom{5}{3}$; $\binom{12}{7} = \binom{12}{5}$
- $\binom{6}{2} = \binom{6}{6-2} = \binom{6}{4}$; $\binom{20}{15} = \binom{20}{5}$

Los números n y $n - k$ se dice que son complementarios con respecto a n.

Dos números combinatorios de igual numerador y cuyos denominadores son complementarios con respecto al numerador, son iguales.

4. 3. $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

Ejemplos:

- $\binom{5}{2} + \binom{5}{3} = \binom{6}{3}$; $\binom{6}{3} + \binom{6}{4} = \binom{7}{4}$;
- $\binom{8}{5} + \binom{8}{6} = \binom{9}{6}$; $\binom{19}{5} + \binom{19}{6} = \binom{20}{6}$

Al margen se encuentra el esquema de la demostración de esta propiedad.

En ① y ⑦ se ha aplicado la propiedad de **4.1.** En ② se ha multiplicado numerador y denominador por $k + 1$, y en ③ por $(n - k)$. Explica los pasos ④, ⑤ y ⑥.

22. Resuelve la siguiente ecuación:

$$\binom{7}{x} = \binom{7}{2}$$

$$\binom{n}{k} \quad \binom{n}{k+1}$$

$$\| ① \qquad ① \|$$

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}$$

$$\| ② \qquad ③ \|$$

$$\frac{n!(k+1)}{(k+1)!(n-k)!} \qquad \frac{n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!}$$

$$④$$

$$\frac{n!(k+1)+n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!}$$

$$\| ⑤$$

$$\frac{n!(k+1+n-k)}{(k+1)!(n-k)!}$$

$$\| ⑥$$

$$\frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} \xrightarrow{⑦} \binom{n+1}{k+1}$$

5 Triángulo de Pascal

Vamos a disponer los números combinatorios asociados a cada número natural de la siguiente manera:

n \ h	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	$\binom{0}{0}$								
1	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$							
2	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$						
3	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$					
4	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$				
5	$\binom{5}{0}$	$\binom{5}{1}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{5}{4}$	$\binom{5}{5}$			
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Si calculamos cada número combinatorio obtenemos la siguiente tabla:

n \ h	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

23. Halla todos los números combinatorios cuyo numerador es 7. ¿Cuántos hay?

24. Halla los números combinatorios cuyo numerador es 6.

25. Halla un número natural distinto de 5 que que verifique:

$$\binom{8}{5} = \binom{8}{x}$$

26. Pon ejemplos y comprueba con ellos que se verifica la relación estudiada en **4.2.**

27. Resuelve la ecuación:

$$\binom{39}{x} = \binom{39}{x+5}$$

Aplica una propiedad de los números combinatorios.

28. Halla la relación que existe entre los números

$$\binom{m}{m} \quad \text{y} \quad \binom{m}{m-n}$$

29. Calcula los valores de

$$\binom{8}{3} \; ; \; \binom{8}{5} \; ; \; \binom{7}{2} \; ; \; \binom{7}{5}$$

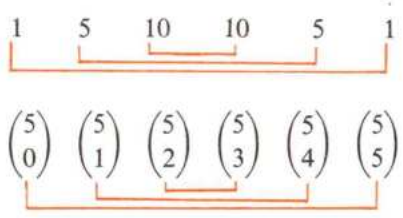
La disposición de los números combinatorios, según la tabla anterior, recibe el nombre de *triángulo de Pascal o de Tartaglia.*

En el triángulo de Pascal se ponen de manifiesto las propiedades de los números combinatorios estudiadas en **4.2.** y **4.3.**

Consideremos una fila cualquiera del triángulo. Si comparamos los números del siguiente modo:

primero-último
segundo-penúltimo
tercero-antepenúltimo,

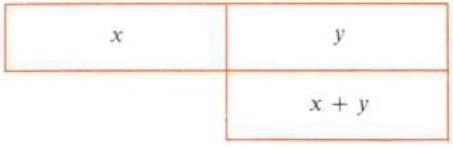
se observa que son iguales. Así en la fila correspondiente al 5:



De este modo queda reflejado en el triángulo anterior que

$$\binom{n}{h} = \binom{n}{n-h}$$

Consideremos tres casillas del triángulo de Pascal, dispuestas según el esquema del margen.



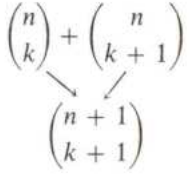
Si x e y son los números combinatorios de las casillas superiores, entonces $x + y$ es el valor de la casilla inferior.

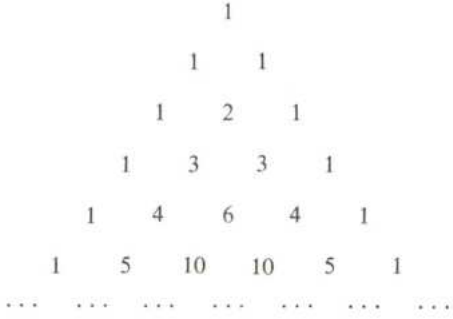
Esta observación nos indica que el triángulo de Pascal se puede construir aplicando la propiedad

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

de los números combinatorios

Al escribir el triángulo de Pascal, a veces se adopta la disposición que se indica al margen; en este caso se aplica la propiedad ya mencionada de los números combinatorios, pero colocándolos del modo siguiente:





Ejercicios y cuestiones

30. Calcular n para que verifique: $n^{(2)} + (n-2)^{(2)} + (n-4)^{(2)} = 98$

31. Si $m > n$ di razonadamente cuál de los siguientes números combinatorios es mayor:

$$\binom{m}{n} \quad \text{o} \quad \binom{m+1}{n+1}$$

32. Demuestra la siguiente relación entre números combinatorios:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} \frac{n}{k}$$

33. Calcula el número natural x sabiendo que se verifica: $\binom{x}{2} = 10$

34. Calcula el número natural x sabiendo que se verifica: $\binom{8}{3} = \binom{7}{3} + \binom{x}{2}$

35. Demuestra que se verifica: $\binom{m+n}{m} = \binom{m+n}{n}$

36. Calcula n para que se verifique la siguiente ecuación:

$$\binom{n}{2} + \binom{n-1}{2} + \binom{n-2}{2} = 136$$

37. Halla los valores de x que satisfacen a: $18\binom{x}{2} + 24\binom{x}{3} = 125x$

38. ¿Son iguales los siguientes números combinatorios?: $\binom{1657}{915}$ $\binom{1657}{742}$

¿Por qué?

39. Calcula el valor de x para que se verifique la siguiente relación: $x! = 2 \cdot 5^{(3)}$

40. Resuelve la siguiente ecuación: $\binom{50}{x} = \binom{50}{x+6}$

41. Calcula x, si $\binom{x}{2} = 36$

42. Calcula: a) $\binom{7}{3} + \binom{7}{4}$; b) $\binom{9}{6} + \binom{9}{5}$; c) $\binom{6}{2} + \binom{6}{3}$; d) $\binom{11}{5} + \binom{11}{6}$

Tema 4 VARIACIONES

Está dedicado este tema al estudio de las variaciones con y sin repetición.

En la primera parte, y después de analizar dos ejemplos, se obtiene la fórmula que permite calcular el número de aplicaciones entre dos conjuntos finitos.

Después se definen las variaciones con repetición como un caso particular de aplicaciones.

Finalmente, se estudia el número de aplicaciones inyectivas entre dos conjuntos finitos y las variaciones ordinarias como un caso particular de aplicaciones inyectivas.

1 Número de aplicaciones entre dos conjuntos finitos

1.1. Sean los conjuntos A y B siguientes:

$$A = \{p, q, r\}, \quad B = \{a, b, c\}$$

¿Cuántas aplicaciones distintas se pueden establecer entre A y B?

Se han representado los diagramas de flechas de algunas de estas aplicaciones.

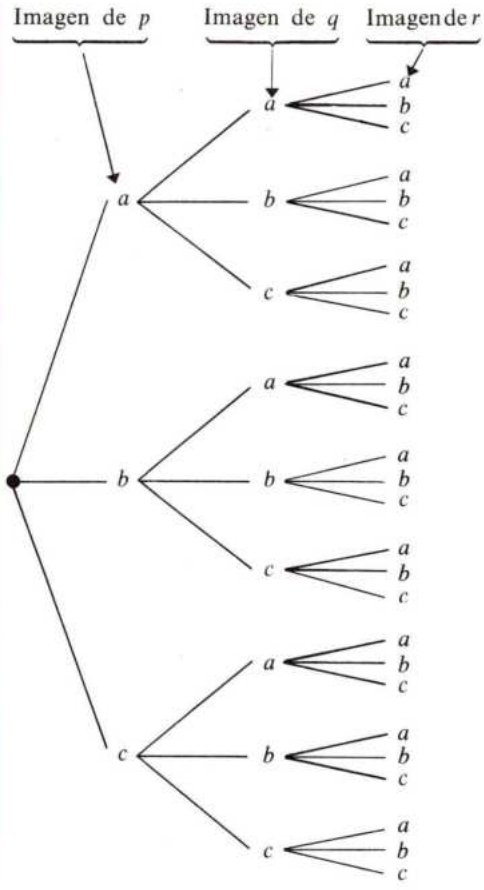
Para encontrar todas las posibles hay que proceder sistemáticamente, como se ha hecho en el *diagrama en árbol.*

Al elemento p de A se le puede asociar como imagen uno cualquiera de los elementos de B, esto mismo es lo que indican las tres primeras ramas del árbol.

Una vez hecha la elección de la imagen de p, hay tres posibilidades para elegir la imagen de q, y esto para cada elección de la imagen de p; hay pues, nueve posibilidades para elegir las imágenes de p y de q (observa en el diagrama las nueve ramas centrales).

Finalmente, una vez elegidas las imágenes de p y de q, hay también tres posibilidades para elegir la imagen de 3.

A cada una de las formas posibles de recorrer el árbol de izquierda a derecha corresponde una aplicación de A en B.



1.2. En una competición de fútbol, han quedado semifinalistas cuatro equipos; se organiza entre ellos los dos encuentros que al margen se indica. Si se hacen quinielas con los dos encuentros, ¿cuántos boletos hay que rellenar para obtener con seguridad los dos aciertos?

Designamos por $A = \{E_1, E_2\}$ y por $B = \{1, X, 2\}$ los resultados de los boletos posibles.

En el diagrama de la derecha se observa que cada boleto es en realidad una aplicación del conjunto $A = \{E_1, E_2\}$ en el conjunto $B = \{1, X, 2\}$. El número de aplicaciones, y, por tanto, el de boletos pedidos, será igual al número de formas posibles de recorrer el árbol del margen de izquierda a derecha.

En este caso, el número de aplicaciones del conjunto $E = \{E_1, E_2\}$ en el conjunto $B = \{1, X, 2\}$, es $3 \times 3 = 3^2 = 9$.

1.3. *Caso general.*

Sean A y B dos conjuntos tales que card $(A) = k$ y card $(B) = n$

Supongamos que los elementos de A están numerados de 1 a k.

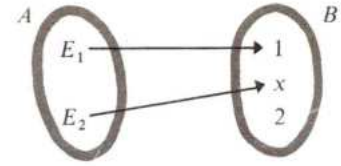
$$A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k\}$$

Al definir una aplicación de A en B, la imagen de a_1 puede ser elegida de n formas distintas ya que card $(B) = n$. Como no se exige que la aplicación sea inyectiva, la imagen de a_2 puede ser la misma que la elegida para a_1, luego la imagen de a_2 se puede elegir también de n formas distintas. Por tanto, las imágenes de a_1 y a_2 se pueden elegir de $n \cdot n = n^2$ formas diferentes.

Esto mismo sucede para los demás elementos $a_3, a_4, \ldots, a_k$ de A.

Si designamos por card $(A \longrightarrow B)$ el número de aplicaciones de A en B resulta

$$\text{card } (A \xrightarrow{a} B) = n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^k$$

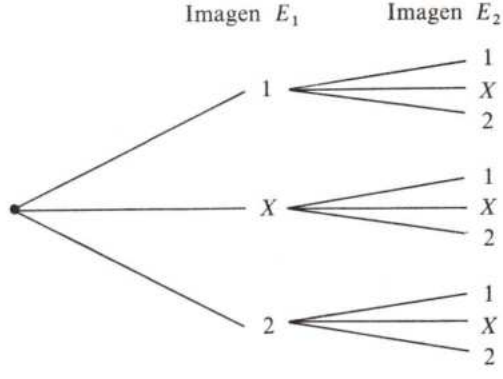


En los boletos figuran los dos encuentros siguientes:

Real Madrid-Celta de Vigo $\rightarrow E_1$
Barcelona-Valencia $\rightarrow E_2$

Real Madrid-Celta de Vigo 1
Barcelona-Valencia X

Quinielas posibles

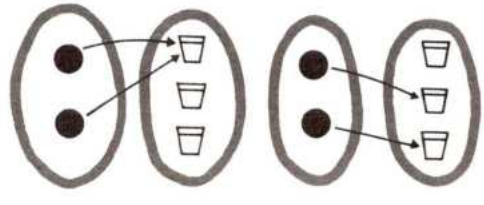


1. Haz el diagrama en árbol de las aplicaciones del conjunto $A = \{a, e, i, o, u\}$ en el $B = \{1, 2\}$

2. ¿Cuántas aplicaciones existen entre los conjuntos $E = \{3, 4, 5\}$ y $F = \{a, b, c\}$?

3. Un niño juega con dos bolas y tres cubitos (se supone que las dos bolas las puede poner en el mismo cubito). ¿De cuántos modos diferentes puede colocar las bolas en los cubitos?

   He aquí algunos casos posibles, completa las aplicaciones que faltan y tendrás resuelto el problema.



2 Variaciones con repetición

2.1. Sean los conjuntos

$$A = \{1, 2\} \quad \text{y} \quad B = \{a, b, c\}$$

¿Cuántas aplicaciones se pueden establecer de A en B?

Los dos diagramas de flechas de la derecha representan a otras tantas aplicaciones.

En el diagrama en árbol están indicadas las aplicaciones posibles.

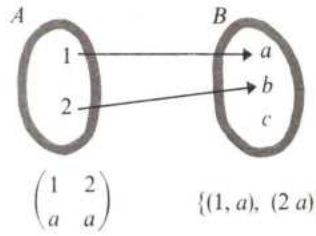
Hay en total $3 \cdot 3 = 3^2$ aplicaciones; cada una de estas aplicaciones se llama una *variación con repetición* de los elementos de B, tomados de dos en dos.

Una aplicación de $\{1, 2\}$ en $\{a, b, c\}$ se puede dar de varias formas; así, la aplicación representada en el segundo diagrama de flechas, queda determinada por el grafo $\{(1, a), (2, b)\}$, o también escribiendo en fila los elementos originales y debajo los correspondientes elementos imágenes

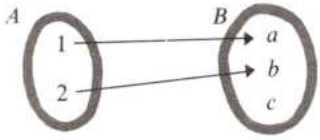
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & b \end{pmatrix}$$

pero es habitual escribir la variación anterior en la forma ab.

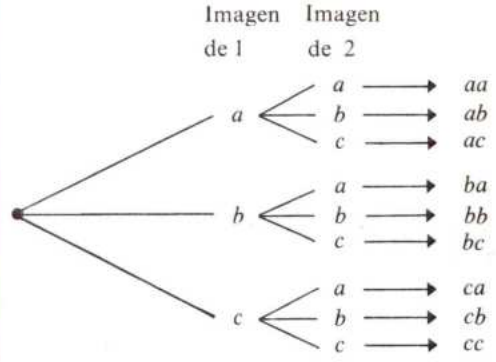
A la derecha del diagrama en árbol aparecen escritas las variaciones con repetición de los elementos de B tomados de dos en dos.



$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & a \end{pmatrix}$ $\{(1, a), (2\ a)\}$



$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & b \end{pmatrix}$ $\{(1, a), (2, b)\}$



2.2. Al lanzar una moneda al aire los resultados posibles son: salir cara (c) y salir cruz (x).

Tratemos de hallar los resultados posibles al lanzar tres monedas.

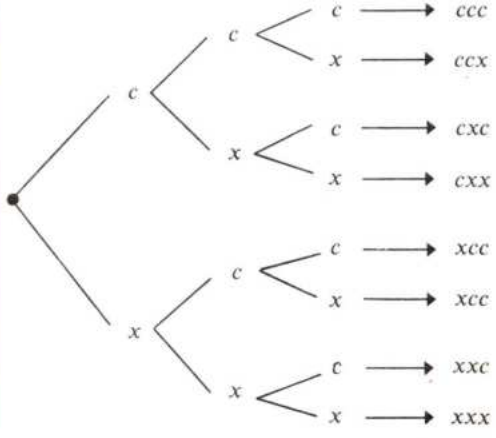
He aquí tres de los resultados posibles:

$$ccc, \ cxc, \ xxc, \ \ldots$$

Introduciendo el conjunto auxiliar $A = \{1, 2, 3\}$ podemos considerar cada resultado como imagen de una aplicación de

$$A = \{1, 2, 3\} \text{ en } B = \{c, x\}$$

En el diagrama en árbol se observa que hay $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$ resultados posibles. Cada uno de estos resultados es una variación con repetición de los elementos de B tomados de tres en tres.



2.3. *Caso general.*

Sea un conjunto A de n elementos.

Definición: *Una aplicación del conjunto* $\{1, 2, 3, \ldots, k\}$ *en el conjunto A recibe el nombre de variación con repetición de n elementos de A. También se llama así a la sucesión de los elementos del conjunto imagen de cada una de esas aplicaciones.*

La aplicación

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & k \\ a & a & b & c & \ldots & r \end{pmatrix}$$

se escribe simplemente $aabc \ldots r$ y esta es la forma tradicional de escribir la variación anterior (ver ejercicio **4**). El número de aplicaciones del conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, k\}$ en el conjunto A de n *elementos* es n^k, según la fórmula que da el número de aplicaciones; por eso el número de variaciones con repetición es:

$$VR_n^k = n^k$$

El símbolo VR_n^k se lee: variaciones con repetición de n elementos tomadas de k en k o variaciones con repetición de n elementos de orden k.

4. Tradicionalmente se han definido las variaciones con repetición de n elementos tomados de k en k, como los distintos grupos de k. elementos que se pueden formar con los n elementos dados, de modo que en los grupos que se forman puedan repetirse los elementos y que dos de estos grupos difieren entre sí o bien en que contienen un elemento diferente o bien en el orden de colocación.

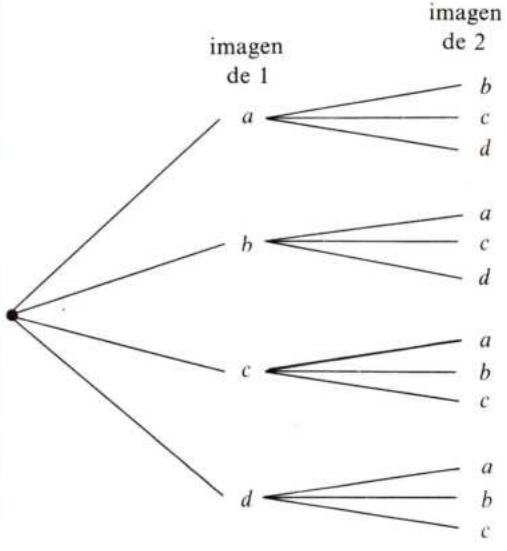
Escribe con ayuda de esta definición las variaciones de dos elementos con las cinco vocales.

5. Haz el diagrama en árbol del número de aplicaciones del conjunto $A = \{1, 2\}$ en el conjunto $B = \{a, b, c\}$. ¿Cuántas aplicaciones hay? Escribe la sucesión de los elementos del conjunto imagen de cada aplicación. ¿Cómo se llama cada una de estas sucesiones?

3 Número de aplicaciones inyectivas

3.1. Si después de trazar el diagrama en árbol de las aplicaciones entre $A = \{1, 2\}$ y $B = \{a, b, c, d\}$

eliminamos las ramas del árbol que corresponden a las aplicaciones que no son inyectivas resulta el diagrama en árbol de las aplicaciones inyectivas del conjunto A en el B.



En él se observa que, al elemento 1 de A se le puede asociar como imagen uno cualquiera de los elementos de B (esto queda indicado en las cuatro primeras ramas del árbol).

Una vez hecha la elección de la imagen de 1 hay *tres* posibilidades para elegir la imagen de 2, por tanto, hay $4 \times 3 = 12$ posibilidades para elegir las imágenes de 1 y de 2 (obsérvese el diagrama en árbol).

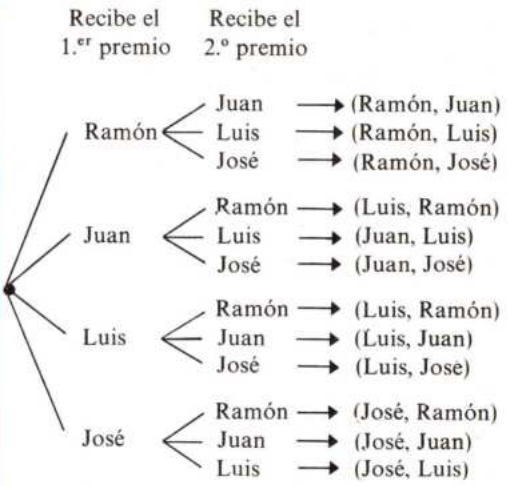
Por tanto, el número de aplicaciones inyectivas de A en B es

$$4 \times 3 = 4^{(2)}$$

3.2. ¿De cuántos modos diferentes se pueden repartir dos premios distintos entre Ramón, Juan, Luis y José, de modo que ninguno de ellos reciba los dos premios?

El problema quedará resuelto si calculamos el número de aplicaciones inyectivas del conjunto de premios $\{p_1, p_2\}$ en el conjunto de personas {Ramón, Juan, Luis, José}.

Estas aplicaciones están indicadas en un diagrama en árbol. En él se observa que hay doce modos de hacer el reparto.



3.3. *Caso general.*

Sean A y B dos conjuntos tales que card $(A) = k$ y card $(B) = n$

Supongamos que los elementos de A están numerados de 1 a k

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k\}$$

Se observa, que si una aplicación de A en B es inyectiva debe ser $k \leqslant n$, ya que si $k > n$ habría al menos dos elementos de A que tendrían la misma imagen.

Para calcular el número de aplicaciones inyectivas de A en B se puede razonar del modo siguiente:

La imagen a_1 puede ser elegida de n formas diferentes, ya que card $(B) = n$.

Una vez elegida la imagen de a_1, quedan $n - 1$ elementos de B, que pueden ser elegidos como imagen de a_2, o sea, la imagen de a_2 se puede elegir de $n - 1$ formas diferentes.

Luego las imágenes de a_1 y a_2 se pueden elegir de $n \cdot (n - 1)$ formas distintas; análogamente, la imagen de a_3 se puede elegir de $n - 2$ formas distintas, la imagen de a_4 se puede elegir de $n - 3$ formas diferentes, y finalmente, la imagen de a_k se puede elegir de $n - (k - 1) = n - k + 1$ formas distintas.

Si designamos por card $(A \xrightarrow{i} B)$ el número de aplicaciones inyectivas de A en B resulta:

$$\text{card}\,(A \xrightarrow{i} B) = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \ldots \cdot (n - k + 1)$$

6. Forma el diagrama en árbol de todas las aplicaciones inyectivas que se pueden establecer entre los conjuntos:

$$A = \{p, q\} \quad \text{y} \quad B = \{a, e, i, o, u\}$$

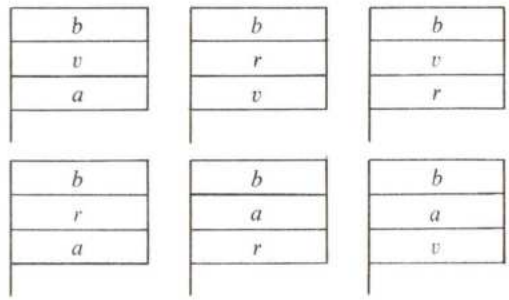
7. ¿Cuántas aplicaciones inyectivas se pueden establecer entre los siguientes conjuntos?

$$A = \{2, 3, 5\} \quad \text{y} \quad B = \{a, b, c, d\}$$

8. ¿De cuántos modos diferentes se pueden colocar un plato de carne y otro de pescado, en cuatro bandejas de un frigorífico, si no se quieren poner los dos platos en la misma bandeja?

4 Variaciones ordinarias

4.1. Se tienen cuatro franjas de papel cuyos colores son blanco, rojo, azul y verde. ¿Cuántas banderas tricolores se pueden formar?



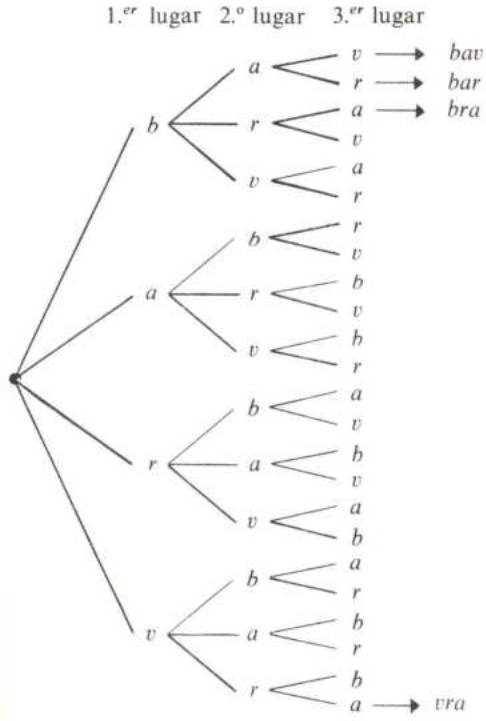
Se observa que con la franja blanca en el primer lugar se pueden formar seis banderas distintas.

¿Cuántas se podrían formar con la franja azul en primer lugar?

Para calcular el número de banderas que se puede formar razonaremos así: en el primer lugar se puede poner una cualquiera de las *cuatro* franjas; en el segundo lugar (centro) se puede colocar una de las *tres* franjas restantes, y en el tercer lugar una de las *dos* que quedan.

El diagrama en árbol indica que el número de banderas que se puede formar es

$$4 \times 3 \times 2 = 24 = 4^{(3)}$$



Podemos considerar que cada bandera se corresponde con la imagen de una *aplicación inyectiva* de

$$A = \{1, 2, 3\} \quad \text{en} \quad B = \{b, r, a, v\}$$

Por tanto, el número de banderas es igual al número de aplicaciones inyectivas de A en B:

$$4 \times 3 \times 2 = 24 = 4^{(3)}$$

Estas aplicaciones de $\{1, 2, 3\}$ en el conjunto $B = \{b, a, r, v\}$ se llaman *variaciones ordinarias* de los elementos de B tomados de tres en tres.

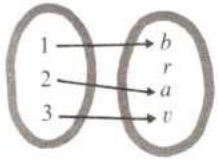
Una cualquiera de estas aplicaciones, por ejemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ b & a & v \end{pmatrix}$$

se escribe simplemente *bav*. Se observa que cada aplicación inyectiva de

$$A = \{1, 2, 3\} \quad \text{en} \quad B = \{b, a, r, v\}$$

determina un subconjunto de B, totalmente ordenado, al cual se le llama también variación de los elementos de B tomados de tres en tres.



4.2. *Caso general.*

Sea A un conjunto de n elementos.

Definición: *Una aplicación inyectiva del conjunto* $\{1, 2, 3, \ldots, k\}$ *en el conjunto* A *recibe el nombre de variación ordinaria de* n *elementos de* A *tomados de* k *en* k.

También se llama así a la sucesión de los elementos del conjunto imagen de cada una de esas aplicaciones:

Su número es (ver **3.3.**)

$$V_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$$

El símbolo V_n^k se lee: variaciones de n elementos tomados de k en k o variaciones de n elementos de orden k.

4.3. Utilizando factoriales, la fórmula de las variaciones también se puede escribir del modo siguiente:

$$V_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) =$$

$$= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot (n-k)!}{(n-k)!} =$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)(n-k)(n-k-1)(n-k-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-k)!} =$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!}$$

La fórmula

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

recibe el nombre de *fórmula factorial de las variaciones.*

9. Calcula V_8^3, V_6^4 y V_9^5; para ello observa cómo se calcula V_7^3 : $V_7^3 = 7 \times 6 \times 5 = 210$.

10. ¿Cuántos factores tiene V_7^3? ¿y V_8^3?

11. a) $6!$ b) $7!$ c) $8!$ d) $\frac{8!}{7!}$ e) $\frac{7!}{6!}$

12. Calcula $\frac{n!}{(n-1)!}$ y $\frac{(n+1)!}{n!}$

Observa lo que ocurre en los apartados d) y e) del ejercicio anterior.

13. También se definen las variaciones ordinarias de n elementos, tomados de k en k o de orden k, como los distintos grupos de k elementos que se pueden formar con los n elementos dados, de modo que dos de estos grupos difieren entre sí o bien en que contienen algún elemento diferente o bien en el orden de colocación. Compara esta definición con la dada aquí y comprueba que cada uno de estos grupos sería la sucesión de los elementos del conjunto imagen de una aplicación inyectiva.

Ejercicios y cuestiones

14. Calcula m para que se verifique $V_m^2 + V_{m-2}^2 + V_{m-4}^2 = 98$.
Observa que $V_m^2 = m(m-1)$; $V_{m-2}^2 = (m-2)(m-3)$ y $V_{m-4}^2 = (m-4)(m-5)$.

15. ¿De cuántas maneras se pueden sentar seis personas en un banco de tres asientos?

16. Con las cifras impares se escriben todos los números posibles de tres cifras no repitiéndose ninguna de ellas. ¿Cuántos números se pueden escribir?

17. ¿Cuántos números de tres cifras se pueden escribir con las cifras 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 si ninguna de ellas se puede repetir?

18. Un barco dispone de ocho banderas. ¿Cuántas señales puede mostrar si cada señal consiste en tres banderas colocadas verticalmente en un asta?

19. Con las cifras del conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, halla los números de dos cifras que se pueden formar.

20. ¿Cuántas quinielas distintas habrá que hacer para obtener con seguridad los catorce aciertos?

21. Una bandera tiene tres franjas. Si se pinta cada una con un color (pueden repetirse los colores en la misma bandera, ¿cuántas banderas distintas pueden formarse si se dispone de cinco colores?

22. Un resultado de un partido de tenis es $A = \{1, 2\}$. ¿Cuántas quinielas distintas pueden hacerse con los resultados de una copa Davis? (Se sabe que son cinco partidos).

23. Una matrícula de coche tiene la primera letra correspondiente a la ciudad (M: Madrid), después un número del 1 al 9999, y finalmente una letra simple o repetida. ¿Cuántos coches se pueden matricular en Madrid con este sistema? (Suponemos que las letras del abecedario son 28).

24. Tiras una moneda al aire. Sabiendo que puede salir cara o cruz, ¿cuántos resultados distintos pueden aparecer si repites la prueba tres veces?

25. Tiras dos dados al aire. ¿Cuántos resultados distintos puedes sacar?

26. Halla los resultados posibles al lanzar cuatro monedas al aire.
Haz un diagrama en árbol.

27. Con las cinco vocales, ¿cuántos grupos de tres letras se pueden escribir? (Observa que se trata de calcular el número de variaciones con repetición de cinco elementos tomados de tres en tres.) ¿Cuántas aplicaciones del conjunto $\{1, 2, 3\}$ en el conjunto $\{a, e, i, o, u\}$ existen?

28. ¿Cuántos números de tres cifras se pueden escribir con las cifras $\{1, 2, 3, 4, 5\}$?

29. ¿Cuántos grupos de cinco letras se pueden escribir con las letras del conjunto

$$A = \{m, a, r, t, e\}$$

(No se excluye del caso de que una letra se repita dos, tres..., cinco veces.)

30. Sabiendo que en una jornada de fútbol hay catorce encuentros, ¿cuántas quinielas diferentes se pueden hacer?

Tema 5

PERMUTACIONES

Se estudia en primer lugar las permutaciones como un caso particular de las biyecciones; también se consideran como las distintas formas de ordenar los elementos de un conjunto finito.

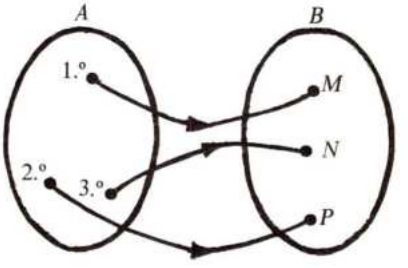
En segundo lugar, se estudia la permutación con repetición, obteniendo la fórmula correspondiente.

1 Aplicaciones biyectivas. Biyecciones

1.1. Consideremos dos conjuntos A y B de igual número de elementos.

Por ser A y B conjuntos finitos de igual cardinal, toda biyección de A en B es una aplicación inyectiva de A en B y recíprocamente, por eso: *el número de aplicaciones biyectivas de A en B es igual al número de aplicaciones inyectivas entre los mismos conjuntos.*

Si card (A) = card (B) = 5, entonces el número de aplicaciones biyectivas de A en B es: $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5!$
ya que éste es el número de aplicaciones inyectivas de A en B.

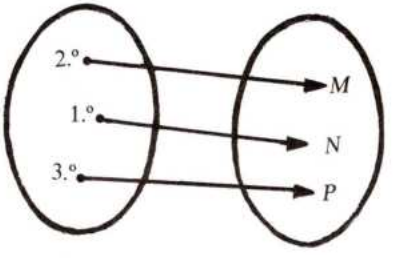


1.2. Se desean repartir tres premios, $A = \{1.º, 2.º, 3.º\}$ entre tres personas, $B = \{M, N, P\}$.

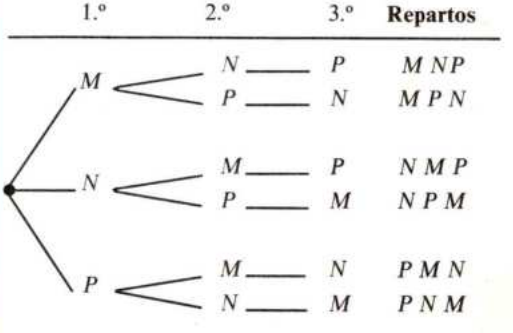
¿De cuántas maneras puede hacerse?

Cada posible reparto es una aplicación biyectiva de A en B.

El diagrama en árbol muestra los posibles repartos.



El número de biyecciones de A en B es: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$



1.3. En general, si card (A) = card (B) = n, como el número de biyecciones de A en B es igual al número de aplicaciones inyectivas de A en B, resulta que el número de aplicaciones biyectivas de A en B es:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Por tanto, si designamos por card $(A \xrightarrow{b} B)$ el número de aplicaciones biyectivas de A en B se tiene:

$$\text{card}\,(A \xrightarrow{b} B) = n!$$

2 Permutaciones

2.1. Definición: *Se llama permutación de los n elementos del conjunto* $A = \{a, b, c, \ldots, p\}$ *a toda biyección del conjunto* $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ *sobre el conjunto A.*

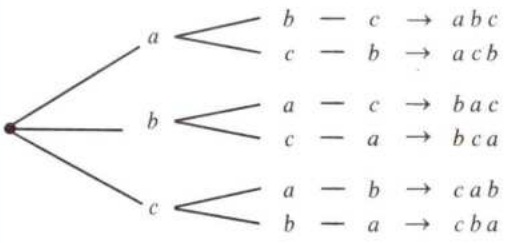
Una biyección de $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ en A, por ejemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \ldots n \\ c & b & a \ldots p \end{pmatrix}$$

determina en el conjunto A una ordenación de sus n elementos $c\,b\,a \ldots p$. A cada una de estas ordenaciones también se llama permutación.

Cuando deseamos considerar el número de maneras en que puede ordenarse un conjunto de n objetos diferentes, estamos ante un problema de permutaciones; *una lista de los n objetos diferentes en un cierto orden es una permutación de los n objetos.*

El diagrama en árbol indica las seis permutaciones de las letras a, b y c.



$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & c & b \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ b & a & c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ b & c & a \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ c & a & b \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ c & b & a \end{pmatrix}$$

El número total de permutaciones del conjunto A de n elementos será igual al número de biyecciones del conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ en el conjunto A. Aplicando la fórmula que da el número de éstas, resulta:

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

o también

$$P_n = n!$$

Ejemplo:

- ¿De cuántas maneras pueden cinco personas colocarse en fila para una foto de grupo?

  Se trata de ordenar de todos los modos posibles un conjunto de cinco elementos, por tanto,

  $$P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

2.2. En un torneo de fútbol participan tres equipos. Designamos estos equipos por M, V y S.

¿De cuántas maneras pueden clasificarse?

El diagrama en árbol muestra todas las clasificaciones posibles.

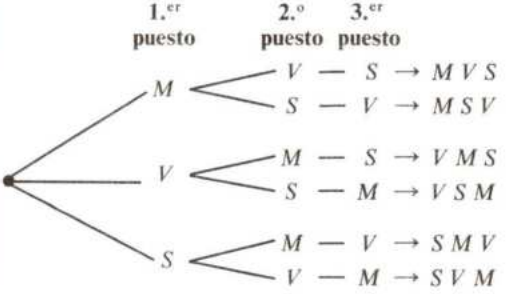
Su número es $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6$.

1. ¿Cuántos números de cuatro dígitos pueden formarse con las cifras 2, 3, 4 y 5, usando cada cifra una sola vez?

2. En una estantería se quieren colocar tres libros rojos, dos azules y cuatro verdes. ¿De cuántas maneras puede hacerse si los libros del mismo color deben ponerse juntos?

3. En un torneo de fútbol participan el Real Madrid, el Barcelona y el Bilbao. ¿De cuántas maneras pueden clasificarse?

4. ¿Cuántas banderas tricolores se pueden formar con tres franjas de tela, una de color rojo, otra de color azul y otra de color amarillo?



3 Permutaciones con repetición

3.1. Sean los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ y $B = \{a, b, c\}$.

Se trata de hallar las aplicaciones suprayectivas de A en B de modo que

a es la imagen de tres elementos de A,
b es la imagen de dos elementos de A,
c es la imagen también de dos elementos de A.

Una de estas aplicaciones suprayectivas f_1 de A en B es la representada al margen. La imagen de f_1 se puede designar por la sucesión siguiente:

$$a\ b\ c\ c\ b\ a\ a.$$

Si distinguimos cada elemento de esta sucesión con un subíndice se tiene:

$$a_1\ b_1\ c_1\ c_2\ b_2\ a_2\ a_3$$

Permutando las *aes* entre sí, las *bes* entre sí y también las *ces* entre sí, obtenemos a partir de f_1

$$3!\,2!\,2!$$

permutaciones. Esto puede repetirse para cualquier otra aplicación suprayectiva y daría lugar al mismo número de permutaciones.

Si indicamos por $P_7^{3,2,2}$ las aplicaciones suprayectivas de A en B, con las condiciones anteriores, se verifica: $P_7^{3,2,2} \cdot 3!2!2! = P_7$ luego

$$P_7^{3,2,2} = \frac{P_7}{3!\,2!\,2!} = \frac{7!}{3!\,2!\,2!}$$

La imagen de cada aplicación suprayectiva de A en B, con las condiciones dadas, recibe el nombre de *permutación con repetición.*

Ejemplo:

- Con las cifras $A = \{1, 3, 5\}$ formamos números de ocho cifras de modo que el 1 se repite cuatro veces y el 3 y 5 dos veces. Veamos cuántos números hay.

  Un número puede ser:

  $$11531153$$

  Se trata, por tanto, de permutaciones con repetición

  $$P_8^{4\cdot 2\cdot 2} = \frac{8!}{4!\,2!\,2!} = \frac{40.320}{96} = 420$$

3.2. *Caso general.*

Definición: *Dado un conjunto* $B = \{a, b, c, \ldots, h\}$ *de* m *elementos, se llama «permutación con repetición de orden* $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$*» las distintas ordenaciones con elementos de* B de modo que:

a se repita α veces
b se repita β veces
. . . . . .
h se repita λ veces

Sea $A = \{1, 2, 3, 4, \ldots, n\}$ un conjunto y $B = \{a, b, \ldots, h\}$ otro conjunto de m elementos con $m \leqslant n$.

Consideremos las aplicaciones suprayectivas de A en B tales que

α elementos de A se aplican en a
β elementos de A se aplican en b
. . . . . .
λ elementos de A se aplican en h

Siendo

$$\alpha + \beta + \cdots + \lambda = n$$

Si numeramos las imágenes de cada una de estas aplicaciones suprayectivas y permutamos las α *aes* entre sí, las β *bes* entre sí, y así sucesivamente hasta permutar las λ *haches* entre sí, resultarán: $\alpha! \cdot \beta! \cdot \ldots \cdot \lambda!$ nuevas permutaciones.

Designando por $P_n^{\alpha, \beta, \ldots, \lambda}$; el número de aplicaciones suprayectivas, con las condiciones anteriores se verifica:

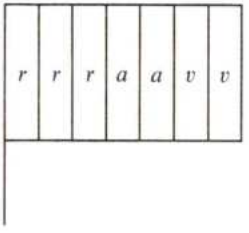
$$P_n^{\alpha, \beta, \ldots, \lambda} \cdot \alpha! \cdot \beta! \ldots \lambda! = n!$$

luego

$$P_n^{\alpha, \beta, \ldots, \lambda} = \frac{n!}{\alpha!\ \beta!\ \ldots\ \lambda!}$$

Ejemplo:

- Una bandera tiene siete franjas. Se quieren pintar tres franjas de rojo, dos de amarillo y dos de verde. ¿Cuántas banderas distintas se pueden formar? Una de las banderas tendría el siguiente aspecto:



Se trata de un problema de permutaciones con repetición

$$P_7^{3, 2, 2} = \frac{7!}{3!\,2!\,2!} = \frac{5.040}{24} = 210 \text{ banderas}$$

5. ¿Cuántas permutaciones distintas se pueden escribir con la palabra *permanente;* observa que la *e* se repite tres veces, y la *n* dos veces.

6. Con las cifras 3, 5, 9. ¿Cuántos números de diez cifras se pueden formar de modo que el 3 y el 5 se repitan cuatro veces y el 9 dos veces?

7. Con las cifras 1, 3 y 5. ¿Cuántos números de seis cifras se pueden formar de modo que en todos se repita dos veces cada cifra.

Ejercicios y cuestiones

8. ¿Cuántos números de cinco cifras se pueden escribir con las cifras impares si no se repite ninguna de ellas?

9. Se tienen siete libros grandes y distintos, cinco medianos y tres pequeños. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden alinear en un estante si han de colocarse juntos los del mismo tamaño?

10. Con las cifras 0, 1, 2, 3, 4, ¿cuántos números de cinco cifras distintas se pueden formar? (Observar que los números que empiezan por 0 son números de cuatro cifras).

11. Con las letras de la palabra Cádiz se forman todas las permutaciones posibles. ¿Cuántas de ellas tienen separadas las vocales?

12. ¿Qué es mayor P_7 o V_7^6?

13. Con las cifras 3, 5, 7, 8, ¿cuántos números de cuatro cifras se pueden escribir? ¿Cuántos de estos números son mayores que 5.000?

14. ¿Cuántos números de cinco cifras se pueden escribir con las cinco cifras impares?

15. Se quieren colocar en una estantería tres libros de Matemática, del mismo formato, cinco de Lengua, iguales también entre sí, y dos de Latín. ¿De cuántas maneras puede hacerse?

16. En un aparcamiento hay colocados diez coches para vender: tres son seat 1430, cuatro seat 127 y tres simca 1200. ¿De cuántas maneras se pueden colocar, suponiendo que los coches de cada marca deben estar juntos?

17. Se dispone de tres bandas de colores: roja, azul y amarilla. ¿Cuántas banderas distintas se pueden hacer? Cada bandera tiene que tener los tres colores.

18. ¿De cuántas formas distintas se pueden sentar seis personas en un banco de seis asientos? ¿y si una persona ocupa siempre una posición fija en un extremo?

19. Resuelve la siguiente ecuación $P_x = 24$.

20. Resuelve la ecuación $\frac{1}{5} P_x = V_4^3$.

21. ¿De cuántas formas posibles pueden llegar seis corredores a la meta en una competición si se sabe que llegan a la meta de uno en uno?

22. Con las cifras 1, 2 y 3, ¿cuántos números de nueve cifras se pueden escribir, si cada una se repite tres veces?

23. Razona que $P_m = V_m^m$.

24. ¿Cuántos números de ocho cifras se pueden escribir con las cifras 2, 4, 6 y 8, si el 2 se repite dos veces y el 4 otras dos?

25. ¿De cuántos modos diferentes se pueden contar las diez personas que hay en una reunión si una de ellas se sienta siempre en cuarto lugar?

Tema 6

COMBINACIONES

Se inicia el tema, obteniendo el número de subconjuntos de un conjunto de cuatro elementos para generalizar después el caso de n *elementos.*

A continuación se definen las combinaciones de orden k *como subconjuntos de* k *elementos de un conjunto de* n *elementos; se obtiene su fórmula factorial y se hace observar que se pueden expresar mediante números combinatorios.*

1 Subconjuntos: su formación y número

1.1. Sea V el conjunto de las vocales

$$V = \{a, e, i, o, u\}$$

Los conjuntos $\{a\}$, $\{a, e, i\}$, $\{i, u\}$ son subconjuntos de V.

Vamos a obtener sistemáticamente todos los subconjuntos de V.

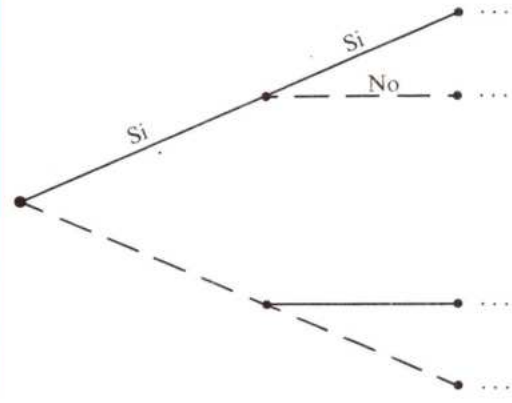
Para formar una parte B de V, es necesario elegir sus elementos.

Cada elemento de V tiene respecto de B dos posibilidades

pertenecer a B
no pertenecer a B

Así, si $B = \{a, e, o\} \subset V$, resulta la tabla siguiente:

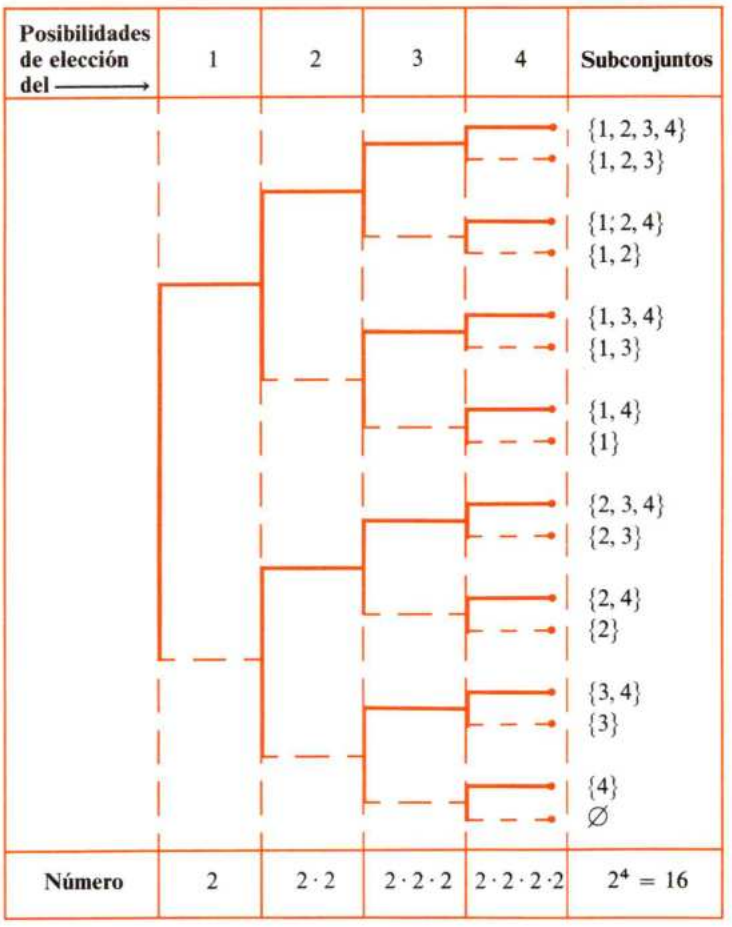
Pertenece a B	a	e	i	o	u
$B = \{a, e, o\}$	Si	Si	No	Si	No



En un diagrama en árbol, la elección afirmativa se indicará con un trazo continuo ——— y la elección negativa se indicará con trazo interrumpido - - - - - - -

1.2. El diagrama en árbol de los subconjuntos de

$$A = \{1, 2, 3, 4\} \text{ es:}$$



El elemento 1 puede o no pertenecer a un subconjunto de A. A cada posibilidad de elección del elemento 1 le corresponden a su vez dos posibilidades de elección del elemento 2.

Elegido o no el elemento 2, hay dos posibilidades de elección del elemento 3.

Finalmente, también hay dos posibilidades de elección del elemento 4.

Recorriendo el diagrama de izquierda a derecha obtenemos todos los subconjuntos de A.

El número de subconjuntos es en este caso

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4$$

1. Forma el conjunto $\mathscr{P}(A)$ si $A = \{a, b, c\}$.

   ¿En cuántas de estas partes entra el elemento a?

2. Halla los subconjuntos de $A = \{a, e\}$. Dibuja el diagrama en árbol.

3. Dibuja el diagrama en árbol $\mathscr{P}(A)$, siendo $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

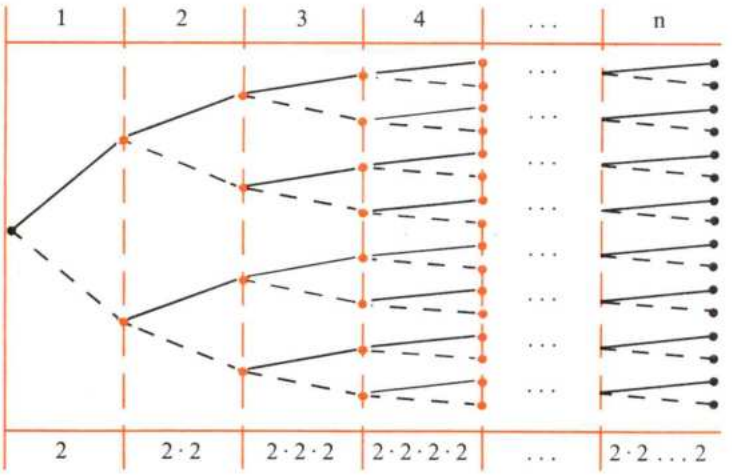
4. Si eliges todos los elementos de A, ¿qué conjunto obtienes?

   Si no eliges ningún elemento de A, ¿qué conjunto obtienes?

1.3. Dado un conjunto finito de n elementos

$$A = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$$

la obtención de todos los subconjuntos de A puede hacerse de una manera sistemática por medio del diagrama en árbol.



Si el conjunto tiene n elementos, entonces, el número de subconjuntos posibles es: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^n$.

1.4. En la siguiente tabla se resumen los resultados anteriores.

	Subconjuntos de k elementos				
Conjuntos		1	2	3	4
	$\varnothing$				
$\{1\}$	$\varnothing$	$\{1\}$			
$\{1, 2\}$	$\varnothing$	$\{1\}$ $\{2\}$	$\{1, 2\}$		
$\{1, 2, 3\}$	$\varnothing$	$\{1\}$ $\{2\}$ $\{3\}$	$\{1, 2\}$ $\{1, 3\}$ $\{2, 3\}$	$\{1, 2, 3\}$	
$\{1, 2, 3, 4\}$	$\varnothing$	$\{1\}$ $\{2\}$ $\{3\}$ $\{4\}$	$\{1, 2\}$, $\{2, 4\}$ $\{2, 3\}$, $\{1, 4\}$ $\{1, 3\}$, $\{3, 4\}$	$\{2, 3, 4\}$ $\{1, 3, 4\}$ $\{1, 2, 3\}$ $\{1, 2, 4\}$	$\{1, 2, 3, 4\}$

5. Un conjunto tiene diez elementos, ¿cuántos subconjuntos tiene?

6. Un conjunto A tiene 32 subconjuntos. ¿Cuántos elementos tiene A?

7. ¿Cuántos elementos tiene $\mathscr{P}(A)$ si

$$A = \{1\ 2, 3, 4, 5, 6\}$$

8. Te dan el conjunto $A = \{a, e, i, o, u\}$. Halla todos los subconjuntos que tienen al menos el elemento a.

9. Halla los subconjuntos de los conjuntos $A = \varnothing$, $B = \{1\}$, $C = \{1, 2\}$, $D = \{1, 2, 3\}$, $E = \{1, 2, 3, 4\}$.

Si contamos los subconjuntos de cada fila, que tienen el mismo número de elementos, resulta la siguiente tabla:

	Número de subconjuntos de k elementos				
Conjuntos	0	1	2	3	4
$\{\varnothing\}$	1				
$\{1\}$	1	1			
$\{1, 2\}$	1	2	1		
$\{1, 2, 3\}$	1	3	3	1	
$\{1, 2, 3, 4\}$	1	4	6	4	1

Observa, que el número de subconjuntos se distribuye según el triángulo de Pascal.

10. Halla los subconjuntos de $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y comprueba que éstos se distribuyen según el número de sus elementos del modo siguiente:

n.° de elementos de los subconjuntos de A	0	1	2	3	4	5
n.° de subconjuntos	1	5	10	10	5	1

2 Combinaciones

2.1. Definición: *Dado un conjunto A de n elementos, se llama combinación de orden k de dichos elementos a todo subconjunto de k elementos de A.*

Si A tiene n elementos, el número de combinaciones de orden k se designa con el símbolo C_n^k o $C_{n,k}$.

Ejemplo:

- Dado el conjunto $A = \{1, 2, 3\}$, las combinaciones de orden 2 son los subconjuntos de dos elementos $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$... Luego $C_3^2 = 3$.

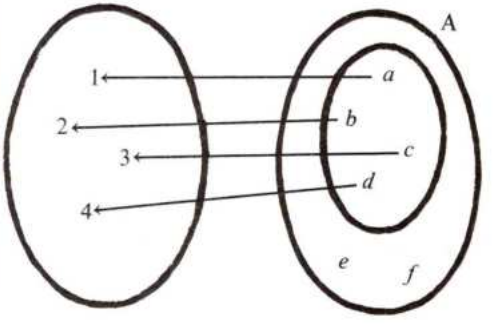
Sea A un conjunto con seis elementos

$$A = \{a, b, c, d, e, f\}$$

y tratemos de determinar el número de combinaciones de orden 4 (subconjuntos de cuatro elementos).

A toda aplicación inyectiva del conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$ en A, se le puede asociar una parte de A con cuatro elementos.

El número de aplicaciones inyectivas del conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$ en el conjunto A, es $6 \times 5 \times 4 \times 3$. El diagrama de la derecha corresponde a una de ellas.



A esta aplicación inyectiva se puede asociar el subconjunto

$$B = \{a, b, c, d\} \subset A$$

¿Cuántas aplicaciones inyectivas se pueden asociar a este mismo subconjunto B de A?

Como toda aplicación inyectiva de $\{1, 2, 3, 4\}$ en B es a la vez una aplicación biyectiva entre ambos conjuntos, y el número de estas es 4!, resulta que hay $4! = 24$ aplicaciones inyectivas que se pueden asociar al mismo subconjunto B de A.

Luego el número de aplicaciones inyectivas será igual al número de subconjuntos (combinaciones de cuatro elementos) por 4!, es decir, $6 \times 5 \times 4 \times 3 = C_6^4 \times 4!$

$$C_6^4 = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3}{4!}$$

$$C_6^4 = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4! \times 2 \times 1}$$

$$C_6^4 = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = 15$$

2.2. Sea ahora un conjunto finito A tal que card $(A) = n$.

Veamos cuántas combinaciones de orden k se pueden formar con los elementos de A.

A toda aplicación inyectiva del conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, k\}$ en A, se le puede asociar un subconjunto B de A, de k elementos.

El número de aplicaciones inyectivas del conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, k\}$ en el conjunto A es $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$.

Pero a un mismo subconjunto B de A, con k elementos, se le pueden asociar tantas aplicaciones inyectivas de $\{1, 2, 3, \ldots, k\}$ en A como biyecciones hay de $\{1, 2, 3, \ldots, k\}$ en B; como el número de éstas es $k!$ resulta:

El número de aplicaciones inyectivas de $\{1, 2, 3, \ldots, k\}$ *en* A, *se puede obtener multiplicando el número de subconjuntos de* k *elementos (combinaciones de orden* k*) por* $k!$

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = C_n^k \cdot k!$$

de donde $C_n^k = \dfrac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}$

Multiplicando numerador y denominador por $(n-k)!$ resulta

$$C_n^k = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot (n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \ldots \cdot 2 \times 1}{k!(n-k)!} =$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

que es la expresión factorial del número combinatorio $\binom{n}{k}$,

11. ¿Cuántos triángulos quedan determinados por veinte puntos tales que tres cualesquiera no están alineados?

12. En una clase hay 80 alumnos, ¿cuántos grupos de trabajo pueden formarse si cada grupo debe tener 10 alumnos?

13. De un conjunto de veinte personas se quiere nombrar una comisión de cuatro personas. ¿De cuántas formas se puede hacer?

14. En una familia de seis personas se acuerda que cada día se encarguen dos para las tareas domésticas. ¿Cuántos grupos distintos se pueden formar?

luego $$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Ejemplo:

- ¿Cuántas rectas determinan ocho puntos tales que tres cualesquiera no estén alineados?

  Si P es el conjunto de los ocho puntos, el problema se reduce a ver cuántos subconjuntos de dos elementos tiene P, puesto que cada dos puntos no alineados determinan una única recta. Entonces el número de rectas determinado por los ocho puntos es $C_8^2 = \binom{8}{2} = \frac{8 \cdot 7}{2!} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$

2.3. *Combinaciones: su formación.*

En **1.3.** hemos aprendido a calcular el número de todos los subconjuntos de un conjunto dado.

Se trata ahora de formar los subconjuntos de k elementos o combinaciones de orden k.

Sea el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Suponemos que los elementos del conjunto están ordenados según un criterio. Aquí podemos tomar:

primer elemento: 1
segundo elemento: 2
tercer elemento: 3
cuarto elemento: 4
quinto elemento: 5

Las combinaciones de orden 1 son:

$$\{1\}, \quad \{2\}, \quad \{3\}, \quad \{4\}, \quad \{5\}$$

A partir de las combinaciones de orden 1 formamos las de orden 2 o binarias del siguiente modo:

$\{1\} \longrightarrow \{1,2\}, \quad \{1,3\}, \quad \{1,4\}, \quad \{1,5\}$
$\{2\} \longrightarrow \quad \{2,3\}, \quad \{2,4\}, \quad \{2,5\}$
$\{3\} \longrightarrow \quad \{3,4\}, \quad \{3,5\}$
$\{4\} \longrightarrow \quad \{4,5\}$
$\{5\}$

Las combinaciones de orden 2, se obtienen a partir de las de orden 1, agregando a la derecha da cada una, los elementos que le siguen en el orden establecido.

Todo esto se puede esquematizar en el diagrama en árbol de la derecha.

Del mismo modo, a partir de las combinaciones de orden 2 o binarias podemos obtener las combinaciones de orden 3 o ternarias.

15. El conjunto $B = \{a, e, i, o, u\}$ es el conjunto de las vocales. Halla todos los subconjuntos que tengan dos elementos. ¿Cuántos hay?

16. En un programa de TV. E. hay cuatro presentadores, si aparecen de dos en dos en la pantalla, ¿de cuántos modos pueden hacerlo sin repetirse?

(Suponte que las iniciales de los presentadores son:

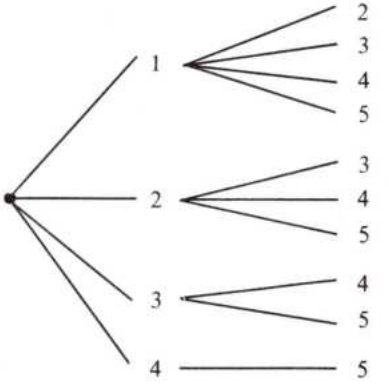
$$\{M,\ A,\ B,\ T\}$$

17. Una pandilla de cuatro amigos A, B, C, D salen de paseo de dos en dos, ¿cuántas parejas distintas pueden formar?

18. Halla los subconjuntos de $A = \{1, 2, 3\}$. ¿Cuántos subconjuntos hay de 0 elementos? ¿Cuántos subconjuntos hay de 1 elementos? ¿Cuántos subconjuntos hay de 2 elementos? ¿Cuántos subconjuntos hay de 3 elementos?

19. Un equipo de fútbol tiene seis delanteros concentrados, suponiendo que cualquiera puede jugar en cualquier puesto de la delantera, ¿cuántas alineaciones distintas pueden jugar?

20. Dibuja un pentágono convexo. ¿Cuántas diagonales se pueden trazar? ¿Cuántos segmentos determinan los vértices? Observa que cada dos determinan un segmento.



Ejercicios y cuestiones

21. Calcula los valores de

$$\binom{3}{3}, \binom{8}{4}, \binom{9}{2}$$

22. Comprueba, hallando los subconjuntos o combinaciones de orden 2 del conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ que hay $\binom{5}{2}$ combinaciones de orden 2.

23. Calcula $C_{7,2}$, $C_{8,4}$, $C_{9,3}$.

24. Calcula los grupos diferentes que se pueden formar con ocho letras si cada agrupación consta de tres elementos.

25. Con los colores del arco iris cuantas mezclas pueden hacerse si tomamos cada vez tres colores.

26. ¿Cuántas multiplicaciones diferentes pueden formarse con los nueve dígitos no nulos si cada producto consta de tres factores?

27. ¿Cuántos caminos diferentes se pueden trazar entre cinco pueblos no situados en línea recta?

28. En una finca del monte hay dispersas varias casetas de guardas cada una de las cuales está unida a las restantes por un camino. Calcula el número de casetas que hay sabiendo que el número de caminos es 36.

29. Un carillón de ocho campanas utiliza seis para el repique diario. ¿Cuántos días pueden pasar sin que se oiga el mismo repique?

30. En un programa de televisión hay siete presentadores. Cada vez aparecen tres. ¿Cuántos programas podemos ver sin que se repitan?

31. Halla la relación que existe entre los números $\binom{m}{n}$ y $\binom{m}{m-n}$

32. Calcula $C_x^2 = 36$.

33. Una persona, que tiene seis amigos, ha prometido salir cada domingo con un amigo o con un grupo diferente de amigos. ¿Puede llevar a cabo su propósito?

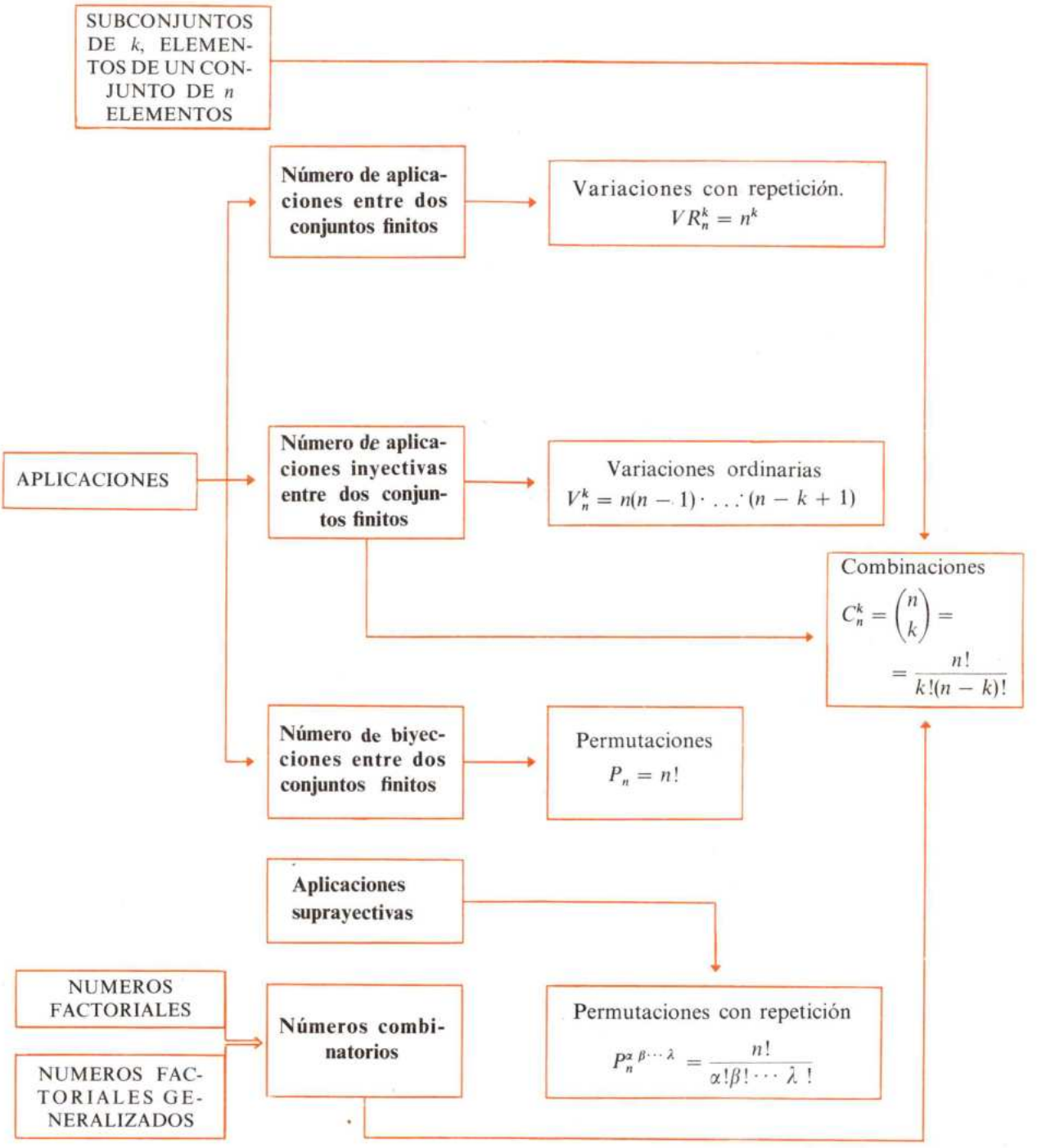
34. En una reunión hay siete personas. ¿Cuántos grupos de cuatro personas se pueden formar? ¿En cuántos de dichos grupos entra una persona determinada?

35. ¿Cuántas diagonales tiene un polígono de n lados?

36. Un estudiante debe responder a ocho de las doce preguntas de que consta un cuestionario, ¿cuántos grupos de respuestas distintas puede elegir?

DIAGRAMA ESTRUCTURAL DE LA UNIDAD

COMBINATORIA



Unidad 3

NUMEROS REALES

Los números reales constituyen el núcleo de la matemática y de sus aplicaciones.

Su estudio, no obstante, es delicado. En esta Unidad hacemos un desarrollo basado en la aproximación decimal. No es el más general, pero prepara para un estudio ulterior más abstracto.

Un concepto básico en el desarrollo de esta Unidad, es el de sucesión de segmentos encajados. Aquí, basados en el sistema de numeración decimal, la sucesión de segmentos encajados tendrá por extremos de los segmentos números decimales.

Dividimos la Unidad en tres temas.

El primero se centra en los números racionales y su expresión decimal.

Los números reales ocupan el tema 8 como ampliación de los racionales.

El conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales con las operaciones de adición y multiplicación tiene estructura de cuerpo.

Finalmente en el tema 3 se hace un estudio detallado de un subconjunto de números reales: los números radicales y se aprende a manejar dichos números en su

Tema 7

1. Representación lineal de $\mathbb{N}$.
2. Representación lineal de $\mathbb{Z}$.
3. Representación lineal de $\mathbb{Q}$.
4. Números decimales.
5. Expresión decimal de los números racionales.
6. Graduación decimal de la recta.
7. Representación de un decimal limitado.
8. Aproximación decimal de un número no decimal.

Tema 8

1. Existencia de números no racionales.
2. Aproximación de $\sqrt{2}$ por números decimales.
3. Números decimales no racionales.
4. Axioma de continuidad.
5. Igualdad de expresiones decimales.
6. Números reales.
7. Adición de números reales.
8. Multiplicación de números reales.
9. Potenciación de números reales.
10. Ordenación en $\mathbb{R}$.
11. Sucesión de números reales.

Tema 9

1. Radicales cuadráticos.
2. Radicales de índice n.
3. Números radicales. Formas radicales.
4. Multiplicación de radicales.
5. División de radicales.
6. Forma típica de un radical.
7. El grupo aditivo de los radicales semejantes.
8. Potencias de radicales.
9. Raíz de una raíz.
10. Potencia de exponente racional.
11. Racionalización de denominadores con radicales.

Tema 7

INTRODUCCION AL NUMERO REAL

En este tema se hace un estudio de los números racionales insistiendo en su expresión decimal.

Los dos tipos de números racionales, decimales y no decimales, se conocen en su expresión decimal porque

- *los decimales admiten una expresión decimal periódica de periodo 0 ó 9 (una de ellas, no ambas);*
- *los no decimales tienen por período otros bloques de cifras.*

En resumen: un número es racional si admite una expresión decimal periódica, y recíprocamente.

Como soporte intuitivo de la teoría, tratamos de expresar gráficamente en la recta graduada los resultados obtenidos; para ello empezamos con la representación de $\mathbb{N}$ *y* $\mathbb{Z}$.

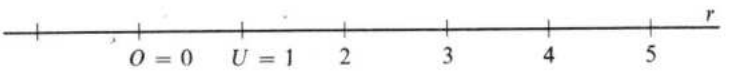
1 Representación lineal de $\mathbb{N}$

Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n, \ldots\}$$

Si fijamos en una recta r del plano, un punto que designamos por O y otro por U, podemos establecer una correspondencia de $\mathbb{N}$ en r asociando al punto O el número 0 y al punto U el número 1.

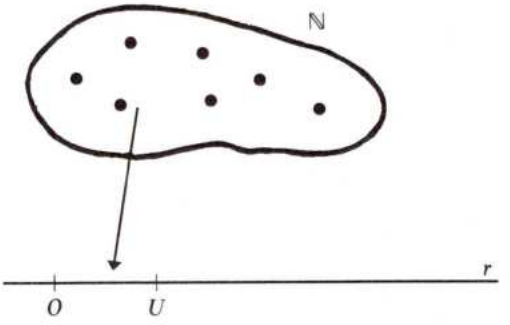
Basta trasladar ahora segmento $\overline{OU}$, como se hace en la figura, para obtener los segmentos $\overline{12}$, $\overline{23}$, $\overline{34}$, ...



La recta r, a la que hemos asociado los números naturales, se llama *recta graduada por los números naturales o recta natural.*

Los números correspondientes por la graduación a los puntos de r se llaman coordenadas numéricas o abscisas.

El par (O, U) correspondiente al par $(0, 1)$ es el sistema de referencia de la recta.



$\mathbb{N} \xrightarrow{c} r$

(Fig. 1)

2 Representación lineal de $\mathbb{Z}$

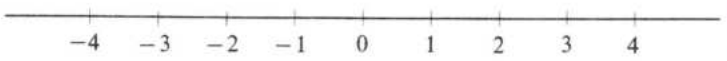
El conjunto $\mathbb{Z}$ es una ampliación de $\mathbb{N}$.

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \ldots\}$$

El conjunto $\mathbb{Z}_+$ se indentifica con $\mathbb{N}$.

$$\mathbb{Z}_+ = \{0, +1, +2, +3, +4, \ldots, +n, \ldots\}$$

La representación lineal de $\mathbb{Z}$ es:



Nos referimos a esta representación con el nombre de recta graduada entera o *recta entera.*

3 Representación lineal de $\mathbb{Q}$

El conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales es:

$$\left\{\left[\frac{a}{b}\right] \Big/ (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*\right\}$$

$\left[\frac{a}{b}\right]$ es un número racional y $\frac{a}{b}$ es uno de sus representantes.

Los números enteros se identifican con los números racionales de representante $a/1$, es decir $\mathbb{Z} \backsimeq \mathbb{Q}_{(1)}$

Podemos ampliar la recta entera y obtener la *recta graduada racional.*

La representación lineal de $\mathbb{Q}$ se obtiene hallando los puntos correspondientes a los subconjuntos:

$$\mathbb{Q}_{(1)}, \mathbb{Q}_{(2)}, \mathbb{Q}_{(3)}, \mathbb{Q}_{(4)}, \ldots$$

El problema se reduce a dividir un segmento en $2, 3, 4, \ldots$ partes iguales.

La figura del margen muestra cómo se puede proceder para obtener la recta graduada racional.

La figura 2, indica cómo puede obtenerse el punto medio del segmento $[0, 1] = \overline{01} = \overline{OB'}$.

Sobre la recta s se llevan dos segmentos $\overline{OA} = \overline{AB}$.

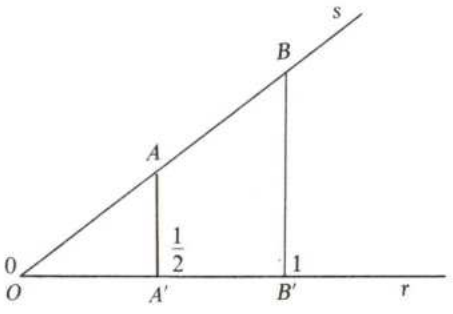
Se une B con B' y por A se traza una paralela a BB' resulta así $0A' = A'B'$ por el teorema de Tales.

$\mathbb{Q}_{(2)}$, números racionales con representantes irreducibles de denominador 2.

$\mathbb{Q}_{(3)}$, los de denominador 3.

$\mathbb{Q}_{(4)}$, los de denominador 4.

. . . . . .

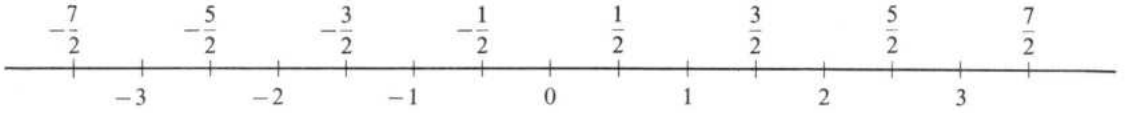


$OA = AB$ $\quad AA' \parallel BB'$

(Fig. 2)

Repitiendo el proceso para los demás segmentos de la recta entera se tiene:

$$\mathbb{Q}_{(1)} \cup \mathbb{Q}_{(2)}$$



La división del segmento $[0, 1]$ en tres segmentos iguales, se hace como se indica en la figura 3, llevando en la recta auxiliar s tres segmentos iguales.

$$\overline{OA} = \overline{AB} = \overline{BC}$$

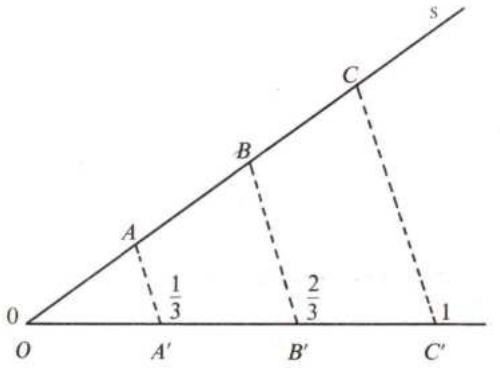
Se une C con C' y por A y B se trazan paralelas a $\overline{CC'}$, se obtiene así por el teorema de Tales que

$$\overline{OA'} = \overline{A'B'} = \overline{B'C'}$$

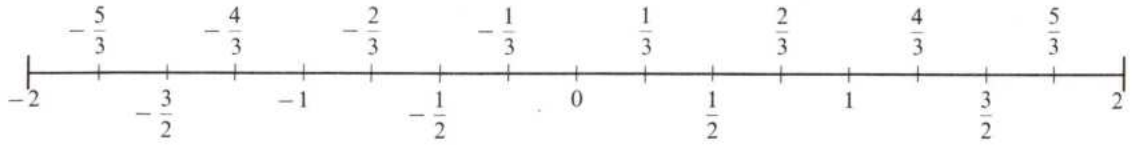
Repitiendo el proceso para los demás segmentos de la recta entera se obtiene.

$$\mathbb{Q}_{(1)} \cup \mathbb{Q}_{(2)} \cup \mathbb{Q}_{(3)}$$

Si se representa también en r los puntos correspondientes a $\mathbb{Q}_4, \mathbb{Q}_5, \mathbb{Q}_6, \ldots$ se tiene la recta graduada racional o *recta racional.*



(Fig. 3)



Tenemos así una correspondencia c de $\mathbb{Q}$ en r

$$\mathbb{Q} \xrightarrow{c} r$$

«c» asocia a cada número racional un único punto de r
«c» es una aplicación inyectiva
«c» transporta a r el orden natural de $\mathbb{Q}$.

La graduación de la recta r por $\mathbb{Q}$ queda determinada cuando conocemos la imagen por «c» de los números 0 y 1:

Estos puntos se designarán por O y U.

3.2. En la recta racional, se llama intervalo abierto de extremos a y b, y se designa por $]a, b[$ al conjunto de todos los números racionales x tales que $a < x < b$

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{Q} \mid a < x < b\}$$

1. Divide un segmento $\overline{AB}$ en cuatro y cinco partes iguales.
2. Dibuja un segmento y divídelo en diez partes iguales.
3. Divide el segmento $[0, 1]$ de la recta entera en diez partes iguales.

   El nombre de cada una de esas partes es la «*décima*».

   Escribe los números correspondientes a cada uno de esos puntos.
4. Divide una «décima» en diez partes iguales. (Amplía el dibujo.) El nombre de cada una de esas partes es una «centésima».

   Escribe los números correspondientes a cada uno de esos puntos.

Se llama intervalo cerrado a la izquierda y abierto a la derecha, y se representa por $[a, b[$, al conjunto de todos los números racionales x tales que $a \leqslant x < b$

$$[a, b[= \{x \in \mathbb{Q} \mid a \leqslant x < b\}$$

Del mismo modo se define en $\mathbb{Q}$ el intervalo $]a, b]$, abierto por la izquierda y cerrado por la derecha

$$]a, b] = \{x \in \mathbb{Q} \mid a < x \leqslant b\}$$

Finalmente, se llama intervalo cerrado o segmento de extremos a y b, al conjunto de números racionales x tales que, $a \leqslant x \leqslant b$

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{Q} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$$

5. Representa los intervalos siguientes y di en cada caso los que son disjuntos:

a) $]1, 5[$ y $[4, 6]$
b) $[1, 3]$, y $[2, 5]$
c) $]4, 6[$, y $[6, 8]$
d) $]1, 4]$, y $[4, 6]$

4 Los números decimales

Se llaman números decimales los números racionales que tienen un representante cuyo denominador es una potencia de 10.

$$\frac{3}{2} = \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{15}{10} \text{ es un número decimal}$$

$$\frac{4}{5} = \frac{4 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{8}{10} \text{ es un número decimal.}$$

$$\frac{9}{20} = \frac{9 \cdot 5}{20 \cdot 5} = \frac{45}{100} \text{ es un número decimal.}$$

Las fracciones cuyo denominador es una potencia de 10 se llaman *fracciones decimales.*

El conjunto de los números decimales se designa por $\mathbb{D}$.

Los números $\frac{3}{2}, \frac{4}{5}, \frac{9}{20}$ se dice que son números decimales escritos en forma fraccionaria.

Las fracciones decimales se pueden escribir también de la siguiente manera llamada *forma decimal:*

$$\frac{3}{2} = \frac{15}{10} = 1{,}5; \quad \frac{4}{5} = \frac{8}{10} = 0{,}8; \quad \frac{9}{20} = \frac{45}{100} = 0{,}45$$

Estos resultados se obtienen también dividiendo el numerador por el denominador

$$\begin{array}{r|l} 3 & 2 \\ 10 & 1{,}5 \\ 0 & \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{r|l} 40 & 5 \\ 0 & 0{,}8 \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{r|l} 90 & 20 \\ 100 & 0{,}45 \\ 0 & \end{array}$$

6. Comprueba que

a) $\frac{2}{4}$ b) $\frac{3}{5}$ c) $\frac{17}{50}$

son números decimales.

7. $\frac{7}{16} = \frac{7 \cdot 5^4}{2^4 \cdot 5^4} = \frac{7 \cdot 5^4}{(2 \cdot 5)^4} = \frac{7 \cdot 5^4}{10^4}$ es un número decimal. ¿Qué factores aparecen en la descomposición del denominador en factores primos?

8. Escribe cinco números decimales en forma fraccionaria.

9. Las fracciones $\frac{3}{5}$ y $\frac{12}{20}$ son equivalentes.

Halla una fracción decimal equivalente a ambas.

10. Halla la forma decimal, por división, de

a) $\frac{3}{10}$ b) $\frac{4}{50}$ c) $\frac{3}{4}$ d) $\frac{5}{8}$

11. Halla la forma fraccionaria de

a) 1,5 b) 0,75 c) 0,8 d) 0,45

5 Expresión decimal de los números racionales

5.1. *La fracción irreducible, cuyo denominador es un producto de potencias de 2 y de 5, se puede convertir en una fracción que tenga por denominador una potencia de* 10.

En efecto: sea a/b una fracción irreducible.

Si $\frac{a}{b} = \frac{a}{2^m \cdot 5^p}$ pueden ocurrir dos casos:

a) $m = p$, entonces $\frac{a}{b} = \frac{a}{2^m \cdot 5^p} = \frac{a}{2^m \cdot 5^m} = \frac{a}{(2 \cdot 5)^m} = \frac{a}{10^m}$

b) $m > p$, es decir $m = p + r$, $r > 0$

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{2^m \cdot 5^p} = \frac{a}{2^{p+r} \cdot 5^p} = \frac{a \cdot 5^r}{2^{p+r} \cdot 5^{p+r}} = \frac{a \cdot 5^r}{2^{p+r} \cdot 5^{p+r}} =$$

$$= \frac{a \cdot 5^r}{2^m \cdot 5^m} = \frac{a \cdot 5^r}{10^m}$$

Ejemplos:

- $\frac{7}{5} = \frac{7 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{14}{10} = 1{,}4$
- $\frac{3}{20} = \frac{3}{5 \cdot 2^2} = \frac{3 \cdot 5}{5^2 \cdot 2^2} = \frac{15}{10^2} = 0{,}15$

Como consecuencia de la propiedad anterior resulta:

Un número racional admite una expresión decimal limitada, cuando su representante canónico (la fracción irreducible) tiene por denominador un número cuyos únicos factores primos son 2 *y* 5.

5.2. *Una fracción irreducible cuyo denominador no es un producto de potencias de* 2 *y de* 5 *no se puede convertir en una fracción que tenga por denominador una potencia de* 10.

En efecto, sea a/b una fracción irreducible, en la que b tiene otros factores primos distintos del 2 y del 5.

Si a/b fuese equivalente a una fracción decimal, resultaría

$$\frac{a}{b} = \frac{N}{10^p} \Leftrightarrow N = \frac{a \cdot 10^p}{b}$$

Si b contiene factores primos diferentes del 2 y del 5 la división $\frac{a \cdot 10^p}{b}$ será inexacta, es decir, no resultará jamás el resto cero. Como el resto de la división $a \,\lfloor b$ es siempre menor que b, y como ningún resto es cero, después de $(b - 1)$ divisiones, a lo más, tendrá que repetirse alguno de los restos ya obtenidos, y a partir de él aparecerán los mismos dividendos parciales e iguales cifras del cociente, en el mismo orden.

12. Las fracciones $\frac{4}{5}$ y $\frac{28}{35}$ son decimales.

Comprueba por división que se trata del mismo número decimal.

13. Observa cómo se pueden descomponer en producto de factores primos las potencias de 10

$$10 = 2 \times 5, \quad 100 = 10^2 = (2 \times 5)^2 = 2^2 \cdot 5^2$$

Haz la descomposición de

1.000 ; 10.000 y 100.000

Sin hacer cálculos.

14. Comprueba sin hacer la división que:

$$\frac{2}{8}, \quad \frac{3}{5}, \quad \frac{4}{20}, \quad \frac{3}{80}, \quad \frac{7}{125}$$

son números decimales.

Observa que

$$\frac{7}{125} = \frac{7}{5^3} = \frac{7 \cdot 2^3}{5^3 \cdot 2^3} = \frac{7 \cdot 2^3}{(5 \cdot 2)^3} = \frac{7 \cdot 2^3}{10^3}$$

15. Di si son o no números decimales

$$\frac{3}{5}, \quad \frac{4}{7}, \quad \frac{3}{9}, \quad \frac{5}{12}, \quad \frac{6}{18}, \quad \frac{5}{20}$$

Compruébalo haciendo la división.

16. Haz las divisiones,

$$7 \,\lfloor 3, \qquad 4 \,\lfloor 6, \qquad 2 \,\lfloor 12$$

—¿Tienen algún resto parcial nulo?

—Halla en cada una de ellas la cifra decimal que ocupa el lugar 100.

—¿Es necesario que hagas la división hasta ese número? ¿Por qué?

Un número racional admite una expresión decimal periódica, cuando su representante canónico (la fracción irreducible) tiene por denominador un número que tiene algunos de sus factores primos distintos de 2 y 5.

Ejemplos:

- Dividiendo el numerador entre el denominador resulta:
- $\frac{3}{9} = 0,\widehat{3}$; $\frac{3}{7} = 0,\widehat{428571}$; $\frac{7}{9} = 0,\widehat{7}$

5.3. Por otra parte $0,25 = 0,250 = 0,2500 = 0,250000\ldots$ es decir, un número decimal no se modifica si añadimos «ceros» detrás de la última cifra decimal. También se puede comprobar que $0,25 = 0,24999\ldots$

Con esta observación resulta que un número decimal admite también una expresión decimal periódica.

Teniendo en cuenta lo dicho en **5.1.** y **5.2.** resulta que *todo número racional se puede expresar en forma decimal periódica.*

5.4. Consideremos ahora la cuestión recíproca de la estudiada en **5.1.** y **5.2.**

Se puede probar que toda forma decimal periódica puede representarse mediante una fracción. También puede decirse que todo número que admite una forma decimal periódica es un número racional.

Sea el decimal $0,\widehat{13}$ $x = 0,131313\ldots$

Multiplicando por 100; $100x = 13,1313\ldots$ restando

$$100x - x = 13$$

$$99x = 13 \Leftrightarrow x = \frac{13}{99}$$

Las formas decimales que como en $0,\widehat{13}$, el período comienza inmediatamente después de la coma se llaman *periódicas puras.* Cuando el período no comienza después de la coma se llaman *formas decimales periódicas mixtas.*

Ejemplo: $0,237\widehat{45}$

$$x = 0,237454545\ldots$$

$$1.000x = 237,454545\ldots \quad (1)$$

$$100.000x = 23745,4545\ldots \quad (2)$$

Restando (1) de (2) queda $99.000x = 23.745 - 237$

$$x = \frac{23.745 - 237}{99.000} = \frac{23.508}{99.000}$$

Conclusión: Todo número racional admite una expresión decimal periódica y recíprocamente.

17. La aplicación de teorema **5.1.** exige que la fracción sea irreducible:

$$\frac{6}{12} = \frac{2 \cdot 3}{2^2 \cdot 3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

es una fracción decimal.

Comprueba si son decimales o no:

$$\frac{3}{8}, \quad \frac{6}{18}, \quad \frac{15}{12}, \quad \frac{4}{7}, \quad \frac{3}{2}$$

18. Comprueba que las fracciones

$$\frac{3}{4}, \quad \frac{2}{5}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{3}{8}, \quad \frac{7}{20}$$

dan lugar a expresiones decimales, con un número de cifras finito y que

$$\frac{1}{7}, \quad \frac{2}{7}, \quad \frac{4}{3}, \quad \frac{5}{13}$$

dan lugar a expresiones decimales que tienen infinitas cifras.

19. Comprueba que se cumple

a) $\frac{3}{9} = 0,\widehat{3}$ c) $\frac{32}{99} = 0,\widehat{32}$

20. Representa en forma de fracción el número 0,3245.

21. Comprueba que son equivalentes las fracciones

$$\frac{37}{99}, \quad \frac{3737}{9999}, \quad \frac{373737}{999999}$$

22. Teniendo en cuenta que

$$2,\widehat{32} = 2 + 0,\widehat{32}$$

pasa la expresión anterior a la forma fraccionaria.

23. Teniendo en cuenta que

$$2,32\widehat{45} = 2 + 0,32\widehat{45}$$

pasa a forma fraccionaria $2,32\widehat{45}$.

6 Graduación decimal de la recta

Los números decimales vienen definidos por

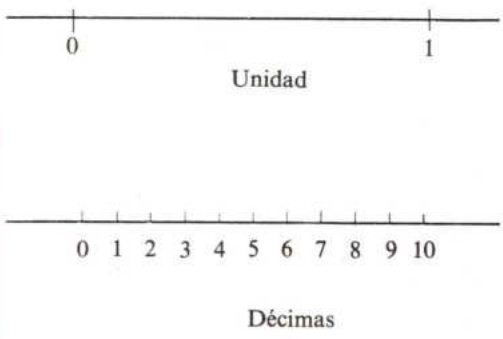
$$\mathbb{D} = \mathbb{Q}_{(1)} \cup \mathbb{Q}_{(10)} \cup \mathbb{Q}_{(100)} \cup \ldots \cup \mathbb{Q}_{(10^n)} \cup \ldots$$

El conjunto de puntos correspondientes a los números decimales en la recta racional forman la *graduación decimal.*

Consideremos como unidad el segmento [0, 1]; si dividimos [0, 1] en diez partes iguales cada una de ellas es una *décima.*

Una *centésima*, será cada parte de las diez iguales en que se ha dividido una décima.

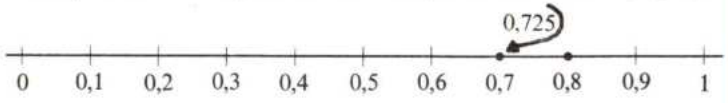
Repitiendo el proceso obtenemos los puntos correspondientes a *centésimas*, *milésimas*, *diezmilésimas*, etc.



7 Representación de un decimal

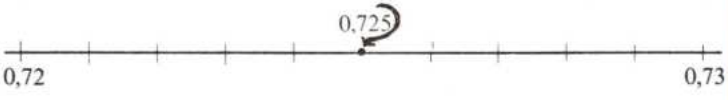
Sea el número 0,725. El punto correspondiente a este número decimal estará comprendido entre 0 y 1.

Dividiendo el segmento [0, 1] en diez partes iguales, el punto correspondiente a 0,725 estará comprendido entre 0,7 y 0,8.



Dividiendo el segmento [0,7 , 0,8] en diez partes iguales, el punto correspondiente 0,725 estará comprendido entre 0,72 y 0,73.

Finalmente dividiendo el segmento [0,72, 0,73] en diez partes iguales, el punto buscado pertenecerá al segmento [0,72, 0,73].



Como un número decimal limitado, tiene un número finito de cifras, el proceso anterior nos permite hallar siempre el punto correspondiente al número dado.

$0{,}725 \in [0, 1]$

$0{,}725 \in [0{,}7,\ 0{,}8]$

$0{,}725 \in [0{,}72,\ 0{,}73]$

24. Dado el segmento [0, 1] de la recta decimal graduada halla tres segmentos encajados en él.

Dibuja los segmentos

[0, 1], [0, 1/2], [0, 1/4], [0, 1/8].

¿Es un conjunto de segmentos encajados?

25. Dibuja tres segmentos encajados de modo que los tres contengan a 1/3.

La sucesión: [0, 1], [0,7, 0,8], [0,72, 0,73], [0,725, 0,726]

se dice que es una sucesión de segmentos encajados y cumple las dos propiedades siguientes:

1.ª $[0, 1] \supset [0{,}7, 0{,}8] \supset [0{,}72, 0{,}73] \supset [0{,}725, 0{,}726]$.

2.ª La longitud de cada segmento es la décima parte del anterior.

Una sucesión de segmentos como la anterior recibe el nombre de sucesión decimal de segmentos encajados.

8 Aproximación decimal de un número no decimal

8.1. En número racional 1/3 no es un número decimal. Vamos a ver que existen números decimales que se aproximan a 1/3 tanto como queramos.

Si observamos atentamente las desigualdades del margen podemos afirmar: (0, 0,3, 0,33, 0,333, 0,3333, ...) [1]

es una sucesión de números decimales que aproxima a 1/3 por defecto.

Cada término de la sucesión es una aproximación de 1/3 (pero no es 1/3).

Todo término de la sucesión [1] es una aproximación mejor que el término anterior y peor que el término siguiente.

A la derecha se han escrito los errores cometidos por defecto.

La diferencia entre un número racional no decimal y las aproximaciones decimales tiende a cero.

8.2. (1, 0,4, 0,34, 0,334, 0,3334, ...) [2] es una sucesión de números decimales que aproxima a 1/3 por exceso.

Cada término de la sucesión es una aproximación de un 1/3 (pero no es 1/3).

Todo término de la sucesión [2] es una aproximación mejor que el término anterior y peor que el término siguiente.

A la derecha se han escrito los errores cometidos por exceso.

Por tanto, las diferencias entre un número racional no decimal y sus aproximaciones decimales tienden a cero.

Nótese que siempre es calculable exactamente, el error cometido.

$$0 < \frac{1}{3} < 1$$

$$0{,}3 < \frac{1}{3} < 0{,}4$$

$$0{,}33 < \frac{1}{3} < 0{,}34$$

$$0{,}333 < \frac{1}{3} < 0{,}334$$

. . . . . .

DIFERENCIAS:

$$\frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3} - 0{,}33 = \frac{1}{3} - \frac{33}{100} = \frac{1}{300}$$

$$\frac{1}{3} - 0{,}333 = \frac{1}{3} - \frac{300}{1000} = \frac{1}{3000}$$

. . . . . .

$$1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$0{,}4 - \frac{1}{3} = \frac{4}{10} - \frac{1}{3} = \frac{2}{30}$$

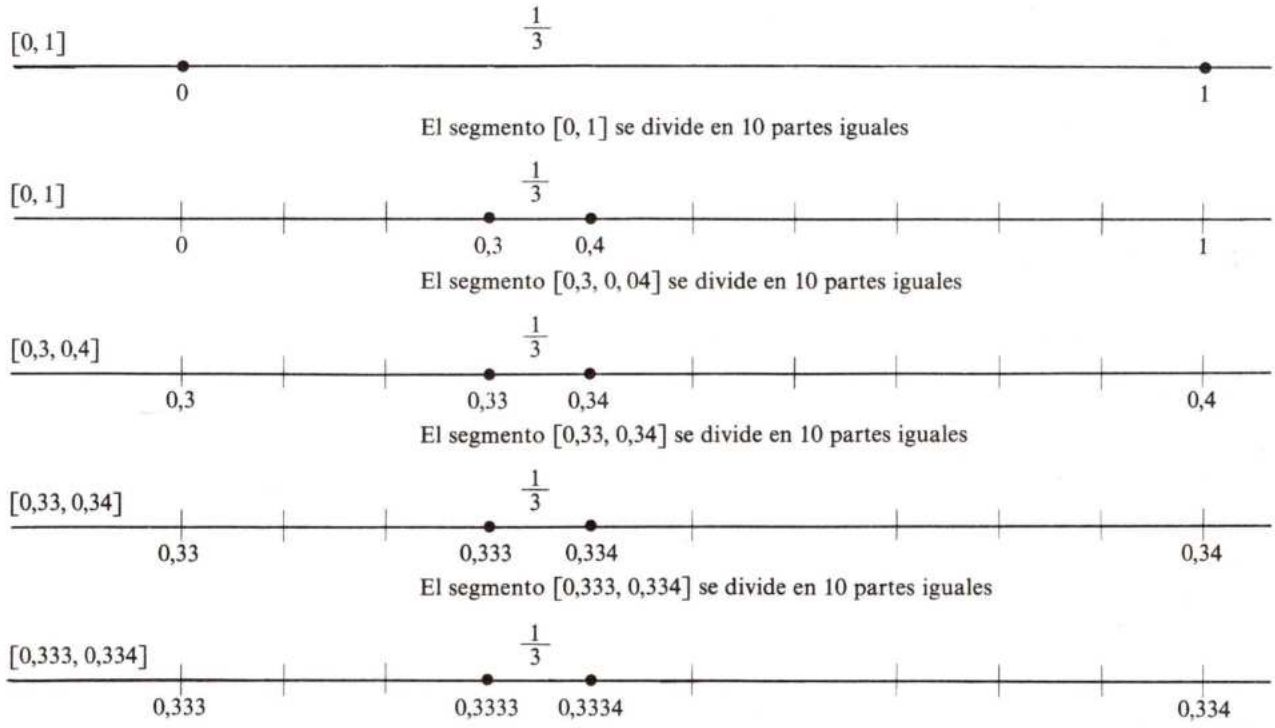
$$0{,}34 - \frac{1}{3} = \frac{34}{100} = -\frac{1}{3} = \frac{2}{300}$$

$$0{,}334 - \frac{1}{3} = \frac{334}{1000} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3000}$$

. . . . . .

8.3. El conjunto de todo los números decimales limitados *no permite* determinar todos los puntos de la recta racional.

La representación del número racional 1/3 por medio de aproximaciones decimales es:



Los segmentos [0, 1], [0,3, 0,4], [0,33, 0,34], [0,333, 0,334], [0,3333, 0,3334]... forman una sucesión de segmentos que verifican:

1.º $[0, 1] \supset [0{,}3, 0{,}4] \supset [0{,}33, 0{,}34] \supset [0{,}333, 0{,}334] \supset \ldots$

2.º Cada segmento es la décima parte del anterior. Obtenemos así una sucesión decimal de segmentos encajados.

Esta sucesión de segmentos encajados determina en la recta r el punto correspondiente al número racional 1/3.

$$\frac{1}{3} = 0{,}\widehat{3} = 0{,}3333\ldots$$

El número racional $\frac{1}{3}$ se puede escribir mediante una de las sucesiones [1], [2] y [3].

$$\frac{1}{3} = \{[0.\,1],\ [0{,}3,\ 0{,}4],\ [0{,}33,\ 0{,}34],\ [0{,}333,\ 0{,}334\ldots]\} \qquad [1]$$

Se observa que *toda sucesión decimal de segmentos encajados en r determina un punto de abscisa racional y sólo uno.*

$$\frac{1}{3} = [0{,}3\ 0{,}33,\ 0{,}333,\ 0{,}3333\ldots] \qquad [2]$$

Es decir, *todo número racional se puede aproximar por una sucesión de números decimales.*

$$\frac{1}{3} = [0{,}4,\ 0{,}34,\ 0{,}334,\ 0{,}3334\ldots] \qquad [3]$$

Ejercicios y cuestiones

26. Divide un segmento AB en ocho partes iguales, mediante trazado de mediatrices.

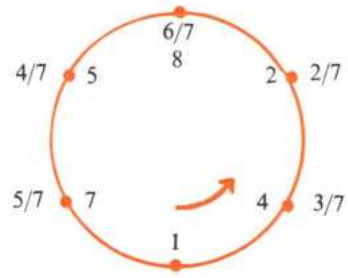
27. Comprueba si son decimales o no los números

a) $\frac{5}{235}$ b) $\frac{248}{1.024}$ c) $\frac{102}{512}$

28. Halla las fracciones de los números decimales

a) 0,37 b) 0,235 c) 2,13

29. Calcula los períodos de $\frac{1}{7}$ $\frac{2}{7}$ $\frac{3}{7}$ $\frac{4}{7}$ $\frac{5}{7}$ $\frac{6}{7}$



Comprueba que las cifras de cada período son las mismas y que el orden de aparición viene dado recorriendo el círculo según indica la flecha a partir de cada punto.

30. Representa gráficamente 0,235 y

a) Halla la sucesión decimal de segmentos encajados.
b) Expresa dicho número en forma fraccionaria.

31. Halla la sucesión decimal de segmentos encajados de $\frac{2}{3}$.

32. Si designamos por:

$\mathbb{N}$: los números naturales
$\mathbb{Z}$: los números enteros
$\mathbb{D}$: los números decimales
$\mathbb{Q}$: los números racionales

Haz el diagrama de Venn de la inclusión.

33. Escribe en forma de sucesión decimal por defecto los números

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{2}{7}$ c) 0,125

34. Escribe los mismos números del ejercicio 34 por medio de una sucesión decimal por exceso.

35. Demuestra la siguiente regla: Toda expresión decimal periódica es igual a una fracción que tiene por numerador el período y por denominador un número con tantas cifras nueve como tiene el período.

36. Aplica la regla anterior para las expresiones

a) 0,51; b) 0,26; c) 0,34

Tema 8

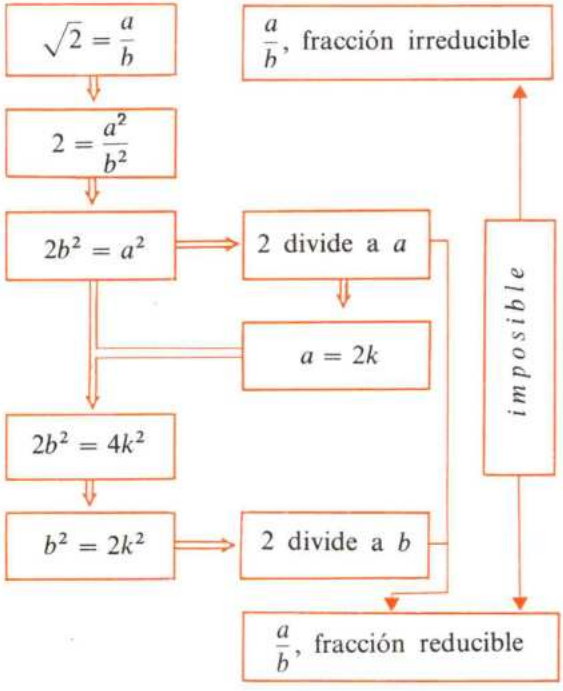
EL NUMERO REAL

Se aborda en primer lugar el problema de la existencia de números no racionales; después, se trata de dar una expresión decimal aproximada para algunos de estos números y se define el número irracional como un número no racional *que viene dado por una expresión decimal no periódica.*

El conjunto $\mathbb{R}$ *de los números reales se define como unión de los racionales e irracionales, y las operaciones de adición y multiplicación se definen mediante sucesiones de números decimales.*

1 Existencia de números no racionales

Probemos que $\sqrt{2}$ no es un número racional, o lo que es lo mismo, vamos a probar que no existe ningún número racional cuyo cuadrado sea 2. Supongamos lo contrario, es decir, que siendo a y b primos entre sí, se verifica: $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. En el esquema siguiente se prueba que esta hipótesis conduce a una contradicción.



1. Demuestra que

$$\sqrt{3},\ \sqrt{5},\ \sqrt{6}\ldots$$

no son números racionales.

2. Si aplicamos a $\sqrt{2}$ el algoritmo de la radicación obtenemos

$$\sqrt{2} = 1{,}4142135\ldots$$

a) ¿Puede tener 1,4142135... un número finito de cifras? ¿Por qué?

b) ¿Puede ser el número 1,4142135... un número decimal periódico? ¿Por qué?

3. Halla las primeras cifras decimales de $\sqrt{3}$ y $\sqrt{5}$.

1.2. En la recta graduada racional r, tomando como lado el segmento $[0, 1]$, construimos un cuadrado.

Por el Teorema de Pitágoras, la diagonal OA' medirá $\sqrt{2}$.

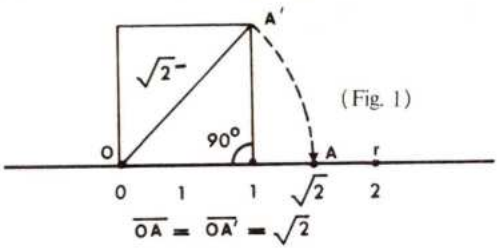
Si con centro en el punto O llevamos OA' sobre la recta r obtenemos el punto A.

El punto A de r no tiene abscisa racional ya que el número $\sqrt{2}$ no es racional.

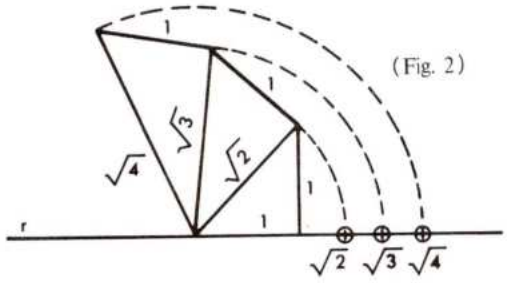
Esto significa que la diagonal OA' del cuadrado es inconmensurable con el lado, es decir, al medir la diagonal tomando el lado como unidad, no se obtiene un número racional.

En la recta graduada racional existen puntos a los que no les corresponde ningún número racional.

En la figura 2 se indica cómo se pueden determinar sobre r puntos cuyas abscisas sean números *no* racionales.



(Fig. 1)



(Fig. 2)

4. Representa gráficamente $\sqrt{5}$,

2 Números reales no racionales

2.1. No existe, según hemos visto, ningún número racional cuyo cuadrado sea 2.

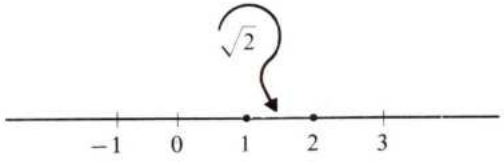
Entonces, ¿qué significado tiene $\sqrt{2}$?

Se trata de hallar números racionales cuyos cuadrados se aproximen a 2.

Partimos de las relaciones siguientes, válidas para números racionales positivos:

$$a < b < c \Leftrightarrow a^2 < b^2 < c^2$$

Por tanto resulta:



$$
\begin{array}{lllll}
1 < \sqrt{2} < 2 & \Longleftrightarrow & < 1 & < 2 < 4 \\
1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5 & \Longleftrightarrow & < 1{,}9\ldots & < 2 < 2{,}2\ldots \\
1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42 & \Longleftrightarrow & < 1{,}98\ldots & < 2 < 2{,}01\ldots \\
1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415 & \Longleftrightarrow & < 1{,}993\ldots & < 2 < 2{,}002\ldots \\
1{,}4142 < \sqrt{2} < 1{,}4143 & \Longleftrightarrow & < 1{,}9999\ldots & < 2 < 2{,}0002\ldots \\
1{,}41421 < \sqrt{2} < 1{,}41422 & \Longleftrightarrow & < 1{,}99998\ldots & < 2 < 2{,}00001\ldots \\
\ldots \quad \ldots & & \ldots & \ldots \quad \ldots \quad \ldots
\end{array}
$$

2.2. Si observamos atentamente el cuadro anterior y consideramos las sucesiones [1], [2], [3] y [4], deducidas de él, podemos afirmar:

La sucesión [1] es una sucesión de números decimales que aproxima a $\sqrt{2}$ por defecto, ya que la sucesión [3] es una sucesión de números decimales que aproxima a 2 por defecto.

Cada término de la sucesión [1] es una aproximación de $\sqrt{2}$ por defecto, puesto que cada término de la sucesión [3] es una aproximación de 2 por defecto.

Todo término de la sucesión [1] es una aproximación de $\sqrt{2}$

- mejor que el término anterior,
- peor que el término siguiente;

ya que sucede lo mismo en la sucesión [3].

La sucesión [2] es una sucesión de números decimales que aproximan a $\sqrt{2}$ por exceso, ya que la sucesión [4] es una sucesión de números decimales que aproximan a 2 por exceso.

Cada término de la sucesión [2] es una aproximación de $\sqrt{2}$ por exceso, puesto que cada término de la sucesión [4] es una aproximación de 2 por exceso.

Todo término de la sucesión [2] es una aproximación de 2

- mejor que el término anterior,
- peor que el término siguiente,

ya que lo mismo sucede en la sucesión [4].

2.3. Si existe el número $\sqrt{2}$, es decir, el número x tal que $x^2 = 2$, x pertenece *necesariamente* al segmento.

$$S_0 = [1, 2]$$

Podemos ahora hallar dos números decimales consecutivos de orden 1 tales que, $\sqrt{2}$ pertenezca *necesariamente* al segmento

$$S_1 = [1,4, 1,5]$$

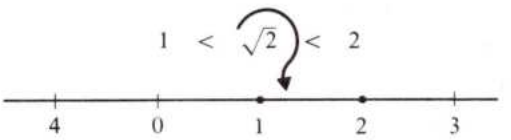
Tomando números decimales consecutivos de orden 2, $\sqrt{2}$ pertenecerá *necesariamente* al segmento

$$S_2 = [1{,}41, 1{,}42]$$

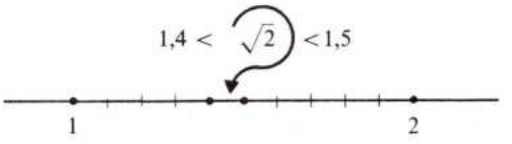
(1, 1,4, 1,41, 1,414, 1,4142, 1,41421, ...) [1]
(2, 1,5, 1,42, 1,415, 1,4143, 1,41422, ...) [2]
(1, 1,9, 1,98, 1,993, 1,9999, 1,99998, ...) [3]
(4, 2,2, 2,01, 2,002, 2,0002, 2,00001, ...) [4]

[1]	[3]
$\sqrt{2} \simeq 1$	$2 \simeq 1$
$\sqrt{2} \simeq 1{,}4$	$2 \simeq 1{,}9$
$\sqrt{2} \simeq 1{,}41$	$2 \simeq 1{,}98$
$\sqrt{2} \simeq 1{,}414$	$2 \simeq 1{,}993$
$\sqrt{2} \simeq 1{,}4142$	$2 \simeq 1{,}9999$
$\sqrt{2} \simeq 1{,}41421$	$2 \simeq 1{,}99998$
... ...	... ...

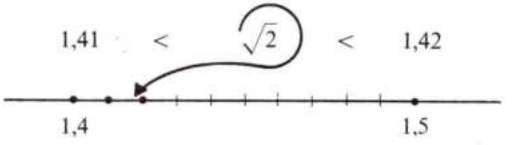
[2]	[4]
$\sqrt{2} \simeq 2$	$2 \simeq 4$
$\sqrt{2} \simeq 1{,}5$	$2 \simeq 2{,}2$
$\sqrt{2} \simeq 1{,}42$	$2 \simeq 2{,}2$
$\sqrt{2} \simeq 1{,}4145$	$2 \simeq 2{,}01$
$\sqrt{2} \simeq 1{,}4143$	$2 \simeq 2{,}002$
... ...	... ...



$S_0 = [1, 2]$



$S_1 = [1{,}4,\ 1{,}5]$



$S_2 = [1{,}41,\ 1{,}42]$

Prosiguiendo indefinidamente estos cálculos, tendríamos una sucesión de segmentos de la recta graduada decimal:

$$S_0 = [1, 2]$$
$$S_1 = [1{,}4, 1{,}5]$$
$$S_2 = [1{,}41, 1{,}42]$$
$$S_3 = [1{,}414, 1{,}415]$$
$$S_4 = [1{,}4142, 1{,}4143]$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Esta sucesión de segmentos verifica:

1.° $S_0 \supset S_1 \supset S_2 \supset S_3 \supset S_4 \ldots$

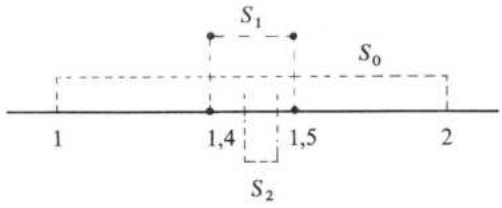
2.° Cada segmento es la décima parte del anterior.

Tenemos así una sucesión decimal de segmentos encajados.

Nota: El Axioma de Continuidad nos dirá que todos estos segmentos tienen en común un punto X de la recta y solamente uno

$$X = S_0 \cap S_1 \cap S_2 \cap \cdots$$

Esta sucesión de segmentos nos definirá el «número real $\sqrt{2}$», que escribiremos también $\sqrt{2} = 1{,}4142135\ldots$ indicando con los puntos suspensivos las infinitas cifras que faltan en esta expresión decimal ilimitada.



5. Escribe cuatro segmentos encajados decimales S_0, S_1, S_2, S_3, que contienen al número $\sqrt{3}$.

6. Escribe los intervalos encajados decimales que contienen al número 1/3.

3 Números decimales no racionales

Un número racional puede expresarse y escribirse en «forma decimal periódica»

$\sqrt{2}$ no es un número racional, por tanto, la obtención de las sucesivas cifras de $\sqrt{2}$, por medio del algoritmo de la radicación, nos da una *expresión decimal no periódica.*

Los números $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}, \ldots$ $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{3}, \ldots$ no son números racionales y, por tanto, sus expresiones decimales *no son periódicas.*

Las expresiones decimales

$$0{,}102010020010002000\ldots$$
$$0{,}120120012000012000012\ldots$$
$$0{,}101001000100001\ldots$$

no son periódicas, luego definen números que no son racionales.

El conjunto de números no *racionales, dados por expresiones decimales* no *periódicas, se llama números irracionales.*

Este conjunto se designa por $\mathbb{I}$.

$\frac{1}{3}$, $\frac{1}{7}$, 2 son números racionales

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{3} = 0{,}33333\ldots \\ \frac{1}{7} = 0{,}142857142857\ldots \end{array}\right\} \text{Expresiones decimales periódicas}$$

$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ son números irracionales

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{2} = 1{,}4142135624\ldots \\ \sqrt{3} = 1{,}7320508076\ldots \\ \sqrt{5} = 2{,}236067\ldots \end{array}\right\} \text{Expresiones decimales no periódicas}$$

4 Axioma de continuidad

4.1. Dado un número decimal sabemos que le corresponde en r un punto de la graduación decimal.

Si se trata de números decimales periódicos se pueden hallar sus imágenes en r considerando la «sucesión de segmentos encajados de números decimales».

La representación de un número irracional se hace también por medio de una sucesión decimal de segmentos encajados:

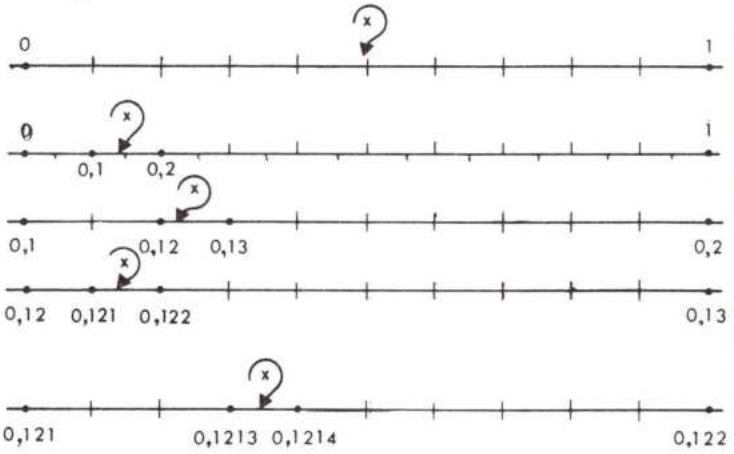
$$S_0, S_1, S_2, S_3, \ldots$$

Así el número irracional $x = 0{,}121314151617$

se puede representar por

$$S_0 = [0,\ 1],\ S_1 = [0{,}1,\ 0{,}2],\ S_2 = [0{,}12,\ 0{,}13],$$
$$S_3 = [0{,}121,\ 0{,}122],\ S_4 = [0{,}1213,\ 0{,}1214],$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

La representación en la recta decimal del número es:

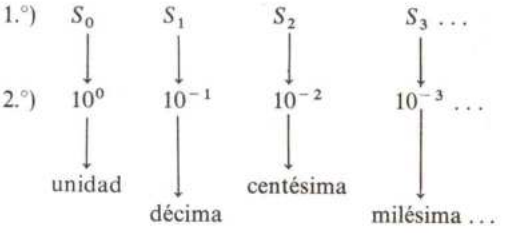


Se observa que *cada segmento está contenido en el anterior y que es su décima parte*, por tanto: $S_0, S_1, S_2, S_3, \ldots$ es una sucesión decimal de segmentos encajados.

¿Existe un único punto de r perteneciente a todos estos segmentos encajados? Todo parece indicar que sí; no obstante no se puede demostrar. Sólo nos queda aceptarlo como *axioma.*

Dada en r una sucesión decimal de segmentos encajados existe un único punto común a todos los segmentos.

O también: *toda expresión decimal tiene por imagen en r un único punto.*



7. Escribe los términos de la sucesión decimal de segmentos encajados que determina el número 0,273.

8. El número π viene dado por

$$\pi = 3{,}141592\ldots$$

Escribe la sucesión de segmentos encajados correspondientes a estas cifras decimales.

9. Un número viene dado por la siguiente sucesión de intervalos encajados:

$$S_0 = [2,\ \ ]$$
$$S_1 = [2{,}5,\ \ ]$$
$$S_2 = [2{,}57,\ \ ]$$
$$S_3 = [2{,}573,\ \ ]$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Halla los números que faltan en cada segmento.

4.2. Recíprocamente: *todo punto de r tiene por original una única expresión decimal.*

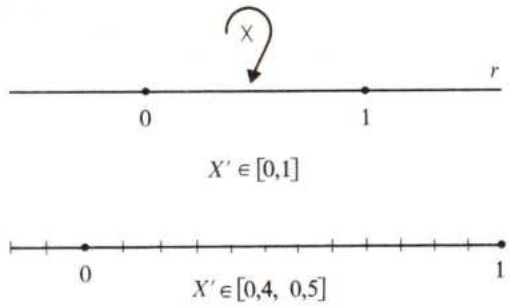
Sea X un punto de r; éste estará en uno de los segmentos de la recta graduada entera.

Supongamos que está en $[0, 1]$ y que no coincide con los extremos. Dividimos $[0, 1]$ en diez partes. Si X no coincide con ningún punto de la graduación estará en una de las décimas. Supongamos que $X \in [0{,}4,\ 0{,}5]$

Repitiendo el proceso, el punto X pertenecerá a una sucesión de segmentos encajados.

Por el axioma de continuidad esta sucesión decimal de segmentos encajados determina en r un único punto X'; ya que X es común a todos los segmentos, corresponde al mismo punto X', es decir, $X' = X$.

La expresión decimal asociada a X será: $X = 0{,}436\ldots$ dado por la sucesión $S_0, S_1, S_2, \ldots$



$S_0 = [0, 1]$
$S_1 = [0{,}4, 0{,}5]$
$S_2 = [0{,}43, 0{,}44]$
$S_3 = [0{,}436, 0{,}437]$
. . . . . .

$X' = S_0 \cap S_1 \cap S_2 \cap S_3 \ldots$
$X' = X$

5 Igualdad de expresiones decimales

Dos expresiones decimales son iguales sí y sólo sí determinan el mismo punto en la recta r.

Las expresiones decimales $0{,}9999\ldots$ y $1{,}0000$ determinan en r el mismo punto, luego $0{,}999\ldots = 1$.
Lo mismo sucede con las expresiones decimales:

$$0{,}25000.,\quad 0{,}24999\ldots$$

La sucesión de segmentos encajados es:

$S_0 = [0{,}2,\ \ 0{,}3]$
$S_1 = [0{,}24,\ \ 0{,}25]$
$S_2 = [0{,}249,\ \ 0{,}250]$
$S_3 = [0{,}2499, 0{,}2500]$
. . . . . .

Esta doble manera de escribir un número en forma decimal es posible siempre *que dicho número sea decimal*, es decir, cuando el punto correspondiente de r sea un punto de la graduación decimal.

10. Escribe de otra forma decimal
a) $0{,}37000\ldots$
b) $0{,}125999\ldots$

11. Escribe los cinco primeros términos de la sucesión decimal de segmentos encajados que determinan el número 3,5264.

6 Números reales

6.1. El conjunto de los números que admiten una expresión decimal periódica es igual al conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$.

El conjunto de los números que admiten una expresión decimal *no* periódica forman los números irracionales $\mathbb{I}$.

Definición: *Se llaman números reales los elementos del conjunto unión de* $\mathbb{Q}$ *e* $\mathbb{I}$.

Este conjunto se designa por $\mathbb{R}$.

El diagrama de inclusión de estos conjuntos está dado en la figura 3.

6.2. El axioma de continuidad nos ha permitido establecer una biyección c de $\mathbb{R}$ en r.

La graduación de la recta r por el conjunto de los números reales queda determinada cuando conocemos la imagen por c de los números 0 y 1.

Estos puntos se designan por O y U.

- O se llama «origen»,
- U se llama «punto unidad».

El par (O, U) se dice que es una referencia de la aplicación biyectiva c. Se pondrá $\mathscr{R} = (O, U)$.

El número asociado a cada punto P de r por la biyección c se llama coordenada o abscisa de P.

La recta r, una vez representados en ella los números reales, se llama *recta real.*

6.3. *Escritura de números reales.*

La determinación del número real $\sqrt{2}$ se hace de la forma siguiente:

$$\sqrt{2} \overset{①}{=} ([1, 2],\ [1{,}4, 1{,}5],\ [1{,}41, 1{,}42],\ [1{,}414, 1{,}415]\ldots)$$

$$\sqrt{2} \overset{②}{=} (1, 1{,}4, 1{,}41, 1{,}414\ldots)$$

$$\sqrt{2} \overset{③}{=} (2, 1{,}5, 1{,}42, 1{,}415\ldots)$$

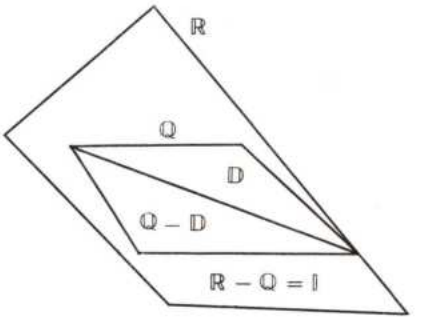
$$\sqrt{2} \overset{④}{=} 1{,}4142135\ldots$$

donde $\sqrt{2}$ viene dado en:

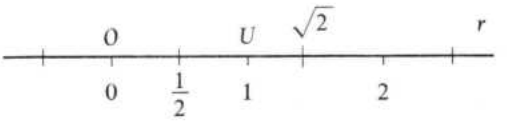
① por la «sucesión decimal de segmentos encajados».
② por la «sucesión decimal por defecto»;
③ por la «sucesión decimal por exceso»;
④ por una expresión decimal con infinitas cifras decimales no periódicas.

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$

$\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \varnothing$



(Fig. 3)



Recta real

12. Representa en la recta r los números reales

a) $\sqrt{2}$
b) $\sqrt{3}$
c) $\sqrt{7}$

13. Escribe $\sqrt{3}$ en las formas (1), (2), (3) y (4).

La imposibilidad de manejar las infinitas cifras nos obliga a tomar aproximaciones de cada número real.

En el margen se han escrito algunas aproximaciones por defecto y por exceso de $\sqrt{2}$.

Nótese que escribir $\sqrt{2} = 1{,}41$ ó $\sqrt{2} = 1{,}4142$ es un error ya que 1,41 y 1,4142 son números racionales y $\sqrt{2}$ es un número irracional.

$\sqrt{2} \simeq 1$ $\quad$ $\sqrt{2} \simeq 2$

$\sqrt{2} \simeq 1{,}4$ $\quad$ $\sqrt{2} \simeq 1{,}5$

$\sqrt{2} \simeq 1{,}41$ $\quad$ $\sqrt{2} \simeq 1{,}42$

$\sqrt{2} \simeq 1{,}414$ $\quad$ $\sqrt{2} \simeq 1{,}415$

$\sqrt{2} \simeq 1{,}4142$ $\quad$ $\sqrt{2} \simeq 1{,}4143$

. . . $\quad$ . . .

14. Escribe las cinco primeras aproximaciones por defecto de $\sqrt{2}$.

7 Adición de números reales

7.1. Definición:

Sean $\alpha = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots)$ y $\beta = (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, \ldots)$ dos números reales determinados por sucesiones de números decimales.

Se llama suma de α y β, y se designa por $\alpha + \beta$, el número real dado por $(a_1 + b_1,\ a_2 + b_2,\ a_3 + b_3,\ a_4 + b_4,\ a_5 + b_5, \ldots)$ es decir:

$$\alpha + \beta = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, a_4 + b_4, a_5 + b_5, \ldots)$$

Ejemplos:

- Sean los números reales

$$\frac{1}{3} = (0{,}3,\ 0{,}33,\ 0{,}333,\ 0{,}3333,\ 0{,}33333,\ \ldots)$$

$$\frac{5}{6} = (0{,}8,\ 0{,}83,\ 0{,}833,\ 0{,}8333,\ 0{,}83333,\ \ldots)$$

dados por dos sucesiones de números decimales.

Su suma es:

$$\frac{1}{3} + \frac{5}{6} = (1{,}1,\ 1{,}16,\ 1{,}166,\ 1{,}1666,\ 1{,}16666,\ \ldots)$$

Si sumamos como números racionales $\frac{1}{3}$ y $\frac{5}{6}$, y hallamos su expresión decimal queda:

$$\frac{1}{3} + \frac{5}{6} = \frac{2}{6} + \frac{5}{6} = \frac{7}{6} = (1{,}1,\ 1{,}16,\ 1{,}166,\ 1{,}1666,\ \ldots)$$

que es la misma sucesión que la que se obtiene sumando término a término las sucesiones que determinan $\frac{1}{3}$ y $\frac{5}{6}$.

15. Expresa $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{7}$ por sucesiones decimales.

Comprueba que $\frac{1}{2} + \frac{3}{7} = \frac{3}{7} + \frac{1}{2}$

- Sean ahora los números:

$$\sqrt{2} = (1, 1{,}4, 1{,}41, 1{,}414, 1{,}4142, \ldots)$$
$$\pi = (3, 3{,}1, 3{,}14, 3{,}141, 3{,}1415, \ldots)$$

dos números reales dados por dos sucesiones de números decimales.

Su suma será:

$$\sqrt{2} + \pi = (4, 4{,}5, 4{,}55, 4{,}555, 4{,}5557, \ldots)$$

7.2. *Propiedades de la adición.*

La suma de números reales verifica las propiedades siguientes:

Propiedad asociativa

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$$

Existe un elemento neutro que es

$$\alpha = (0, 0, 0, 0, 0, \ldots)$$

y se designa por 0.

Todo número real tiene un opuesto.

El elemento opuesto de $\alpha = (a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots)$

es el número real dado por

$$\beta = (-a_1, -a_2, -a_3, -a_4, \ldots)$$

ya que $\alpha + \beta = 0$.

El número real opuesto de α se designa por $-\alpha$.

Propiedad conmutativa

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha$$

7.3. Todo lo anterior se puede expresar así: *El par* $(\mathbb{R}, +)$ *es un grupo conmutativo llamado grupo aditivo de los números reales.*

Siendo $(\mathbb{R}, +)$ grupo, se puede definir la operación opuesta de la suma. Esta operación es la *sustracción.*

Si α y β son dos números reales se define $\alpha - \beta$ como $\alpha + (-\beta)$ es decir $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$

16. Dado el número

$$\sqrt{5} = (2, 2{,}2, 2{,}23, 2{,}236, 2{,}2360, \ldots)$$

halla el número α

$$\alpha = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots)$$

Tal que $\sqrt{5} + \alpha = \sqrt{5}$

17. Dado el número real

$$\sqrt{2} = (1, 1{,}4, 1{,}41, 1{,}414, 1{,}4142, \ldots)$$

Hallar de modo que

$$\sqrt{2} + \alpha = \alpha + \sqrt{2} = 0$$

18. Comprueba las propiedades *a* y *d* de la adición de números reales.

19. Calcula el valor de $\sqrt{3} - \sqrt{2}$.

8 Multiplicación de números reales

8.1. Definición:

Sean $\alpha = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots)$ y $\beta = (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, \ldots)$ dos números reales determinados por sucesiones de números decimales.

Se llama producto de α y β, y se designa por $\alpha \cdot \beta$ o $\alpha\beta$, al número real dado por $(a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3, a_4b_4, a_5b_5, \ldots)$

es decir,

$$\alpha \cdot \beta = (a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3, a_4b_4, a_5b_5, \ldots)$$

Ejemplos:

- Sean los números reales:

$$\frac{1}{3} = (0{,}3,\ 0{,}33,\ 0{,}333,\ 0{,}3333,\ 0{,}33333,\ \ldots)$$

$$\frac{5}{6} = (0{,}8,\ 0{,}83,\ 0{,}833,\ 0{,}8333,\ 0{,}83333,\ \ldots)$$

Su producto es:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{6} = (0{,}2,\ 0{,}27,\ 0{,}277,\ 0{,}2777,\ 0{,}27777,\ \ldots)$$

Si multiplicamos como números racionales $\frac{1}{3}$ y $\frac{5}{6}$, y hallamos la sucesión decimal que define su producto, queda:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{18} = (0{,}2,\ 0{,}27,\ 0{,}277,\ 0{,}2777,\ 0{,}27777,\ \ldots)$$

que es una sucesión equivalente a la que se obtiene multiplicando término a término las sucesiones que determinan $\frac{1}{3}$ y $\frac{5}{6}$.

- Sean los números reales:

$$\sqrt{2} = (1,\ 1{,}4,\ 1{,}41,\ 1{,}414,\ 1{,}4142,\ \ldots)$$

$$\pi = (3,\ 3{,}1,\ 3{,}14,\ 3{,}141,\ 3{,}1415,\ \ldots)$$

Su producto es:

$$\sqrt{2} \cdot \pi = (3,\ 4{,}34,\ 4{,}4274,\ 4{,}441374,\ 4{,}4427093,\ \ldots)$$

20. Expresa $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{7}$ por sucesiones decimales.

Comprueba que $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7} = \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{2}$.

21. Expresa $\sqrt{3}$ y $\sqrt{5}$ por sucesiones decimales.

Comprueba que $\sqrt{3} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{15}$

22. Si para toda terna de números

$$\alpha,\ \beta \quad \text{y} \quad \gamma$$

se verifica: $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$,

¿qué propiedad se cumple?

23. Dado $\sqrt{2} = (1,\ 1{,}4,\ 1{,}41,\ 1{,}414,\ 1{,}4142,\ \ldots)$ ¿qué número $a = (a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots)$ verifica $a \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2} \cdot a = 2$?

24. Dado el número $\frac{2}{3} = (0{,}6,\ 0{,}66,\ 0{,}666,\ \ldots$

¿qué número $a = (a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots)$ verifica: $\frac{2}{3} \cdot a = a \cdot \frac{2}{3} = (1, 1, 1, 1, \ldots) = 1$?

8.2. *Propiedades de la multiplicación.*

El producto de números reales verifica las propiedades siguientes:

Propiedad asociativa $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$

Elemento neutro.

El elemento neutro es el número real dado por $\alpha = (1, 1, 1, \ldots)$ y se designa por 1.

Propiedad conmutativa. $\alpha\beta = \beta\alpha$

Distributiva.

La multiplicación es distributiva respecto de la adición:

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$$

ya que esta propiedad también se verifica en el conjunto $\mathbb{D}$ de los números decimales.

8.3. $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo y unitario, ya que

a) $(\mathbb{R}, +)$ es un grupo abeliano,

b) $(\mathbb{R}, \cdot)$ es un semigrupo y,

c) la multiplicación es distributiva respecto de la adición.

8.4. *Elemento inverso.*

Todo número real no nulo, es decir, distinto de 0, tiene inverso.

Si α es un número real distinto de cero, entonces, el número inverso de α se designa por $\frac{1}{\alpha}$ o α^{-1}.

Como todo elemento no nulo del anillo $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ tiene inverso, resulta que $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ es *un cuerpo llamado cuerpo de los números reales.*

Como $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ es un grupo se puede definir la operación inversa de la multiplicación. Esta operación es la división.

Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0$ se define $\frac{\alpha}{\beta} = \alpha \frac{1}{\beta}$

Nota: Se puede probar que la adición y multiplicación de números reales son operaciones internas en $\mathbb{R}$, así como las propiedades estudiadas en **7.** y en **8.**, pero las demostraciones son difíciles y se salen del nivel de este curso.

25. Dados los numeros reales

$$\alpha = \sqrt{2}, \quad \beta = \frac{1}{2}, \quad \gamma = \frac{3}{4}$$

Comprueba que:

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$$

26. Escribe el inverso de cada uno de los números reales α, β y γ del ejercicio anterior.

27. Dado el número real $\sqrt{3}$ halla su inverso.

28. Explica por qué $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ es un grupo conmutativo

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$$

9 Potenciación de números reales

9.1. Sea a un número real. Se definen las potencias de exponente natural así:

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \overset{n}{\ldots} \cdot a \quad \text{si} \quad n > 1 \quad n \in \mathbb{N}$$
$$a^1 = a$$
$$a^0 = 1$$

La potenciación de exponente natural tiene las siguientes propiedades:

a) $(ab)^n = a^n b^n$

b) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

c) $(a^m)^n = a^{mn}$

d) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

e) $a^m : a^n = a^{m-n}$ si $m \geqslant n$

Las siguientes igualdades prueban la propiedad a):

$$(ab)^n = (ab)(ab) \overset{n}{\ldots} (ab) = (aa \overset{n}{\ldots} a)\ (bb \overset{n}{\ldots} b) = a^n b^n$$

en ella se ha aplicado la definición de potencia y las propiedades conmutativa y asociativa de la multiplicación en $\mathbb{R}$.

9.2. Sea a un número real. Se definen las potencias de exponente entero del modo siguiente:

$$a^n = a \cdot a \overset{n}{\ldots} a \quad \text{si} \quad n > 1,\ n \in \mathbb{Z}$$
$$a^1 = a$$
$$a^0 = 1$$
$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{cuando} \quad n > 0$$

Se verifican las siguientes propiedades:

a) $(ab)^p = a^p b^p$

b) $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$

c) $(a^m)^p = a^{mp}$

d) $a^m \cdot a^p = a^{m+p}$

e) $a^m : a^p = a^{m-p}$

29. Calcula:

a) $3^2 \cdot 3^3$

b) $(3 \cdot 4)^5$

c) $\left(\frac{3}{5}\right)^2$

d) $(3^2)^3$

e) $\frac{3^7}{3^5}$

aplicando las propiedades de la potenciación.

30. Razona cada uno de los pasos de la demostración de la propiedad a) de **9.2.**

$(ab)^p = a^p b^p$, con $p \in \mathbb{Z}$.

Si $p < 0$, será $p = -;\ n > 0$, entonces

$(ab)^p = (ab)^{-n} =$

$$= \frac{1}{ab^n} = \frac{1}{a^n b^n} = \frac{1}{a^n} \cdot \frac{1}{b^n} = a^{-n} b^{-n} = a^p b^p$$

31. Calcula los valores de

a) $3^{-3} \cdot 3^4$

b) $(3 \cdot 4)^{-3}$

c) $\frac{3^{-5}}{3^2}$

d) $\left(\frac{1}{7}\right)^3$

10 Ordenación en $\mathbb{R}$

10.1. Se dice que un número real x es positivo cuando su imagen por c de $\mathbb{R}$ en r pertenece a los segmentos $[0, 1]$, $[1, 2]$, $[2, 3]$, ...

En caso contrario se dice que x es negativo, es decir, cuando pertenece a los segmentos $[0, -1]$, $[-1, -2]$, $[-2, -3]$, ...

Si x es positivo y distinto de cero se dice estrictamente positivo.

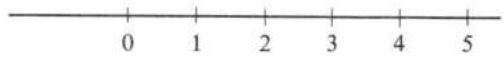
Si x es negativo y distinto de cero se dice estrictamente negativo.

$\mathbb{R}_+$ designa el conjunto de los números reales positivos.

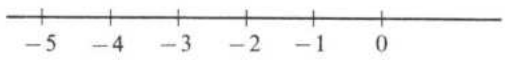
$\mathbb{R}_+^*$ designa el conjunto de los números reales estrictamente positivos.

$\mathbb{R}_-$ designa el conjunto de los números reales negativos.

$\mathbb{R}_-^*$ designa el conjunto de los números reales estrictamente negativos.



$x \in [0, 1]$ o $x \in [1, 2]$ o $x \in [2, 3]$



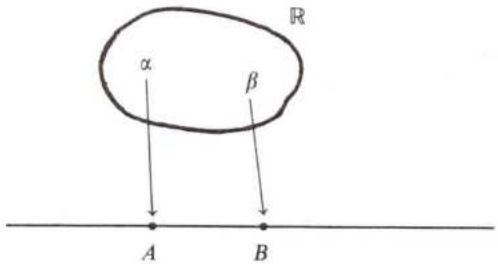
$x \in [0, -1]$ o $x \in [-1, -2]$ o $x \in [-2, -3]$, ...

10.2. Dados dos números reales α y β, se dice que α es menor o igual que β, y se escribe $\alpha \leqslant \beta$, cuando existe otro número $\gamma \geqslant 0$, tal que $\alpha + \gamma = \beta$

$$\alpha \leqslant \gamma \Leftrightarrow \alpha + \gamma = \beta$$

Ejemplos:

- $2 \leqslant 5 \Leftrightarrow 2 + 3 = 5$
- $\frac{1}{2} \leqslant \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$
- $\sqrt{2} \leqslant \pi \Leftrightarrow \sqrt{2} + (\pi - \sqrt{2}) = \pi$



La biyección de $\mathbb{R}$ en r transporta la relación «$\leqslant$», definida en $\mathbb{R}$, al conjunto de puntos de r.

Dados dos puntos A y B de r de abscisas α y β respectivamente, se dice que «A es anterior o igual a B» si $\alpha \leqslant \beta$.

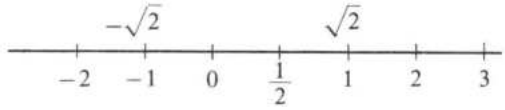
$$A \leqslant B \Leftrightarrow \alpha \leqslant \beta$$

Esta relación se escribirá también con el símbolo «$\leqslant$».

10.3. La relación «$\leqslant$» en $\mathbb{R}$ es una relación de orden total.

Este orden se llama orden natural de $\mathbb{R}$.

El conjunto de los números reales con la relación $\leqslant$ es un conjunto totalmente ordenado.



Recta real

10.4. Del mismo modo que en $\mathbb{Q}$, se definen en $\mathbb{R}$ los siguientes conjuntos:

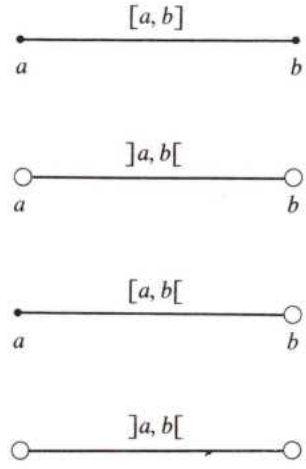
$]a, b[$ intervalo abierto de extremos a y b,

$[a, b[$ intervalo cerrado a la izquierda y abierto a la derecha,

$]a, b]$ intervalo abierto a la izquierda y cerrado a la derecha,

$[a, b]$ intervalo cerrado o segmento de extremos a y b.

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$
$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$$
$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$$
$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$$



Las imágenes de los conjuntos $]a, b[$, $[a, b[$, $]a, b]$, $[a, b]$ por la biyección c de $\mathbb{R}$ en r son los segmentos geométricos determinados por los puntos correspondientes a los números reales a y b.

10.5. *Valores aproximados de números*

a) Sean $a, x \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, entonces «$x$ es valor aproximado de a con error menor o igual que ε» ,sí y sólo sí

$$a - \varepsilon \leqslant x \leqslant a + \varepsilon$$

b) «x es valor aproximado de a por defecto con error menor o igual que ε» sí y sólo sí

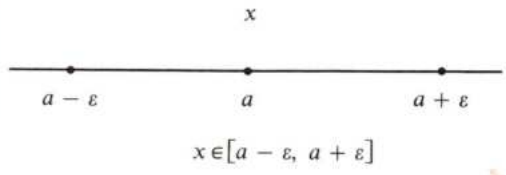
$$a - \varepsilon \leqslant x \leqslant a$$

c) «x es valor aproximado de a por exceso con error menor o igual que ε» sí y sólo sí

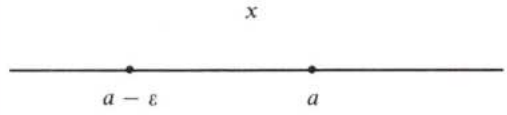
$$a \leqslant x < a + \varepsilon$$

Sea el número $\pi = 3{,}141592\ldots$

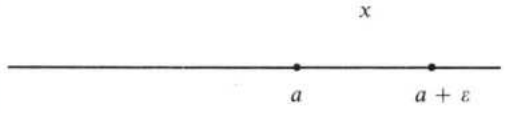
El número 3,14 es un número aproximado de π por defecto con error menor o igual que 0,01.



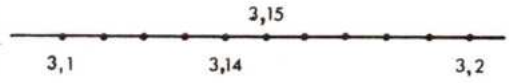
$x \in [a - \varepsilon,\ a + \varepsilon]$



$x \in [a - \varepsilon,\ a]$



$x \in [a,\ a + \varepsilon]$



11 Sucesión de números reales

Se llama sucesión de números reales a toda aplicación de $\mathbb{N}^*$ en $\mathbb{R}$. En la aplicación

$$\mathbb{N}^* \xrightarrow{a} \mathbb{R}$$
$$n \longrightarrow \frac{n+1}{2}$$

Las imágenes de 1, 2, 3, ... son

$$a(1) = \frac{1+1}{2} = 1; \quad a(2) = \frac{3}{2}; \quad a(3) = 2 \ldots$$

para estas aplicaciones particulares se suele escribir $a_1, a_2, a_3, \ldots$ en lugar de $a(1), a(2), a(3), \ldots$ respectivamente.

La ordenación de los números naturales queda trasladada al conjunto imagen de esta aplicación, y también se llama sucesión a estos números así ordenados

$$\begin{array}{ccccc} a_1, & & a_2, & & a_3, \ldots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 1, & & \frac{3}{2}, & & 2, \ldots \end{array}$$

Los primeros términos de la sucesión $a_n = \dfrac{n^2-1}{n+2}$

son

$$a_1 = \frac{1^2-1}{1+2} = 0$$

$$a_2 = \frac{2^2-1}{2+2} = \frac{3}{4}$$

$$a_3 = \frac{3^2-1}{3+2} = \frac{8}{5}$$

La expresión

$$a_n = \frac{n^2-1}{n+2}$$

se llama término general de la sucesión $0, \frac{3}{4}, \frac{8}{5}, \ldots$

32. Calcula los términos a_5, a_7, a_9 y a_{10} en la sucesión

$$\mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$a_n \longrightarrow (-1)^n(n^2+3))$$

33. Escribe los cinco primeros términos de la sucesión

$$\mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longrightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

34. Halla los cinco primeros términos de la sucesión

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{n}$$

Ejercicios y cuestiones

35. Di cuáles de las siguientes expresiones decimales definen números irracionales:

a) 0,1010010001...

b) 0,135135135...

c) 1,4142135...

36. Los resultados de las sucesivas tiradas de un dado son las cifras decimales de un número: ¿Será un número racional o irracional?

37. Escribe cinco números aproximados a $\sqrt{2}$ con error menor que 0,01.

38. El número $\sqrt{2} = 1{,}4142135...$ Halla $(\sqrt{2})^4$.

39. Halla los cinco primeros segmentos de la sucesión de segmentos encajados que contienen a $\sqrt{3}$.

40. Representa en la recta real los conjuntos

a) $]3, 5[$, b) $]-1, 5]$, c) $[-1, 0]$, d) $[-3, 2[$

41. Dada la sucesión $\frac{3}{-3}\ \frac{6}{1}\ \frac{9}{5}\ \frac{12}{9}$ halla el término general a_n.

42. El término general de una sucesión $2n^2 - 18 = a_n$. Escribe un término del lugar 13 y otro del lugar 21. ¿Es nulo algún término de esta sucesión?

43. Escribe cinco números aproximados a 2 con error menor o igual que 0,01.

44. Señala en la recta el punto correspondiente a $\sqrt{7}$.

45. Halla el menor segmento que tenga por extremos números enteros consecutivos al cual pertenezca el punto correspondiente de

a) $\sqrt{57}$, b) $\sqrt{122}$, c) $\sqrt{1.001}$

46. Dado el número racional $\frac{1}{6}$, escribe los cinco primeros términos de la sucesión decimal de segmentos encajados que lo determinan.

47. Dada la sucesión $\mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$a_n = (-1)^n(n^3 - 8)$

¿Qué término de esta sucesión es 0? Calcula: a_5, a_6, a_8.

48. Simplifica $\dfrac{3^{-2} \cdot 3^4 \cdot 3^{-5} \cdot 3^2}{3^4 \cdot 3^{-7} \cdot 3}$.

49. Escribe las siguientes expresiones de cuadro que no aparezcan exponentes:

$(2^3)^2$; $(2^{-3})^2$; $(2^3)^{-2}$; $(2^{-2})^3$; $(3^{-1})^{-4}$; $(4^{-6})^{-3}$; $(4^{-2})^{-1}$; $(5^{-1})^{-1}$

Tema 9 RADICALES

Se inicia el tema proponiendo una notación clara para los radicales cuadráticos. A continuación se hace la distinción entre número radical y forma radical; esta distinción es conveniente para formular, de modo preciso, algunas propiedades de los radicales.

Con frecuencia se recurre a las sucesiones para operar con números radicales, de este modo se insiste en la idea de que cada número real se puede manejar mediante una de las sucesiones que lo definen.

1 Radicales cuadráticos

1.1. Sea A un número real positivo.

Existen dos números reales x y $-x$ tales que

$$x^2 = A \quad \text{y} \quad (-x)^2 = A$$

Los números x y $-x$ se llaman *raíces cuadradas de* A, y se simbolizan por $\sqrt{A}$ y $-\sqrt{A}$.

$$(x = \sqrt{A}) \Leftrightarrow (x \geqslant 0 \text{ y } x^2 = A)$$

$$(x = -\sqrt{A}) \Leftrightarrow (x < 0 \text{ y } x^2 = A)$$

Para referirnos a las dos raíces de A se usa la notación $\sqrt{((A))}$ es decir,

$$\sqrt{((A))} = \{x, -x\} = \{\sqrt{A}, -\sqrt{A}\}$$

El símbolo $\sqrt{\ }$ se llama radical; $\sqrt{A}$ se lee radical de A y A se dice que es el radicando.

Los números $\sqrt{A}$ y $-\sqrt{A}$ se llaman *radicales cuadráticos.*

$$\sqrt{4} = 2$$

$$-\sqrt{4} = -2$$

$$\sqrt{((4))} = \{2, -2\}$$

$$\sqrt{0} = -\sqrt{0} = 0$$

1. Calcula las raíces

a) $\sqrt{16}$

b) $-\sqrt{16}$

c) $\sqrt{((16))}$

2. Calcula las raíces

a) $\sqrt{\frac{4}{25}}$

b) $-\sqrt{\frac{4}{25}}$

c) $\sqrt{\left(\left(\left(\frac{4}{25}\right)\right)\right)}$

3. Expresa en forma decimal (3 cifras)

a) $\sqrt{2}$ b) $-\sqrt{2}$

1.2. Al número A le hemos impuesto la condición de que sea positivo. ¿Qué sucede con los números negativos?

$\sqrt{-4}$ y $\sqrt{-9}$ no son números reales. Estas expresiones carecen de sentido en $\mathbb{R}$.

En efecto,

$$\sqrt{-4} \neq 2 \quad \text{y} \quad \sqrt{-4} \neq -2$$
$$\sqrt{-9} \neq 3 \quad \text{y} \quad \sqrt{-9} \neq -3, \quad \text{puesto que:}$$

El cuadrado de todo número real es un número positivo.

Por tanto: *los números reales negativos carecen de raíz cuadrada.*

Los números reales positivos tienen dos raíces cuadradas.

4. Cita tres números reales que tengan dos raíces cuadradas y tres que no tengan ninguna. ¿Existe algún número que tenga una raíz cuadrada solamente?

5. Demuestra que $(\sqrt{A})^2 = A$, utilizando la definición de $\sqrt{A}$.

2 Radicales de índice n

2.1. Consideremos un número real A y un número natural $n \in \mathbb{N}^*$.

Se dice que x es una raíz n-ésima de A, y se escribe $\sqrt[n]{A}$, cuando se verifica que, $x^n = A$, es decir, $x = \sqrt[n]{A} \Leftrightarrow x^n = A$.

El símbolo $\sqrt[n]{\ }$ se llama *radical de índice n*, n es el índice del radical.

A, se dice que es el radicando.

Si $n = 1$, $\sqrt[1]{A} = A$.

Si $n = 2$, $\sqrt[2]{A}$ se llama radical cuadrático.

Si $n = 3$, $\sqrt[3]{A}$ se llama radical cúbico.

Ejemplos:

- $\sqrt[3]{-8} = 2$ porque $(-2)^3 = -8$
- $\sqrt[10]{1024} = 2$ porque $2^{10} = 1024$
- $\sqrt[10]{1024} = -2$ porque $(-2)^{10} = 1024$
- $\sqrt[5]{32} = 2$ porque $2^5 = 32$

6. Halla la raíz cúbica de los siguientes números racionales:

a) $\frac{8}{27}$ b) $\frac{64}{27}$ c) 125

7. Demuestra que $(\sqrt[n]{A})^n = A$, utilizando la definición de $\sqrt[n]{A}$

2.2. Basándonos en las propiedades de las potencias de exponente n y en la definición de $\sqrt[n]{A}$, resulta:

Todo radical de índice par y radicando positivo tiene dos raíces opuestas.

Todo radical de índice par y radicando negativo no tiene raíces.

Todo radical de índice impar tiene

- *una raíz positiva si el radicando es positivo,*
- *una raíz negativa si el radicando es negativo.*

Para distinguir las diferentes raíces de un número, emplearemos siempre la siguiente notación:

$\sqrt[n]{A}$ designa: la raíz positiva, cuando A es positiva y n par, y la única raíz de A, cuando n es impar.

$-\sqrt[n]{A}$ designa la raíz opuesta de $\sqrt[n]{A}$,

$\sqrt[n]{((A))}$ designa el conjunto de las raíces de A.

Indice $n \in \mathbb{N}^*$

Radicando \ n	Par	Impar
+	Dos Raíces opuestas + y −	Una Raíz +
−	Ninguna raíz	Una Raíz −
0	Una raíz 0	

Indice $n \in \mathbb{N}^*$

Radicando \ n	Par	Impar
+	$\sqrt[4]{16} = +2$ $\sqrt[4]{16} = -2$	$\sqrt[3]{8} = 2$
−	$\sqrt{-4}$ No existe	$\sqrt[3]{-8} = -2$
0	Una raíz 0	

3 Números radicales. Formas radicales

3.1. Los números $\sqrt{4}$, $\sqrt{8}$, $-\sqrt{\frac{25}{9}}$ no son números irracionales a pesar de estar bajo el signo de radical $\sqrt[n]{\ }$.

Los números $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{-7}$, $\sqrt[3]{5}$, son números irracionales.

Los números racionales que no tienen raíz en $\mathbb{Q}$, pero sí en $\mathbb{R}$, se llaman números radicales.

Por tanto: *Los números radicales son los números irracionales dados por raíces de números racionales.*

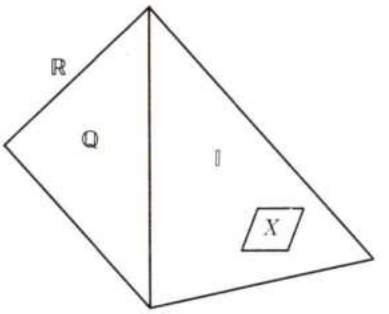
Se tiene así el siguiente diagrama de inclusión cuando designamos por:

$\mathbb{R}$, números reales,

$\mathbb{Q}$, números racionales,

$\mathbb{I}$, números irracionales,

X, números radicales.



El número $\pi = 3{,}1415\ldots$ es un número irracional, pero no es radical.

3.2. *Un número real se dice que está escrito en «forma radical» cuando está dado por una raíz indicada.*

Los números

$$\sqrt[3]{8}, \quad -\sqrt{4}, \quad -\sqrt[4]{0{,}5}, \quad \sqrt{\frac{4}{49}}, \quad -\sqrt[5]{7}$$

son números reales en forma radical;

de ellos:

$\sqrt[3]{8}$, $-\sqrt{4}$, $\sqrt{\frac{4}{49}}$ *no son números radicales*

$-\sqrt[4]{10{,}5}$, $-\sqrt[5]{7}$ *son números radicales.*

3.3. Todo número real puede escribirse de infinitas maneras en *forma radical.*

Si $r \in \mathbb{R}_+$ entonces $r = \sqrt[n]{r^n}$

Si $r \in \mathbb{R}_-$ entonces $r = \sqrt[2n+1]{r^{2n+1}}$

o también $r = -\sqrt[2n]{r^{2n}}$

Ejemplos:

- $2 = +\sqrt{4} = \sqrt[3]{8} = +\sqrt[4]{16} = \cdots$
- $-2 = -\sqrt{4} = -\sqrt[4]{16} = -\sqrt[6]{64} = \cdots$
- $-2 = \sqrt[3]{-8} = \sqrt[5]{-32} = \sqrt[7]{-128} = \cdots$

8. Expresa en forma radical los números

a) $\frac{2}{3}$ b) π c) 5

9. Expresa en forma radical los números

a) $-\frac{2}{3}$ b) -5 c) $-\pi$

3.4. *Todo número radical puede escribirse de infinitas maneras en «forma radical».*

El siguiente esquema, muestra la obtención de las diferentes formas radicales a partir de una dada:

Indice $n \in \mathbb{N}^*$

Radicando \ A \ n	Par	Impar
+	$\sqrt[n]{A} = \sqrt[mn]{A^m}$ $-\sqrt[n]{A} = -\sqrt[mn]{A^m}$	$\sqrt[n]{A} = \sqrt[mn]{A^m}$
−		$\sqrt[n]{A}\begin{cases} = -\sqrt[mn]{A^m}, m = \dot{2} \\ = \sqrt[mn]{A^m}, m \neq \dot{2} \end{cases}$

Al margen se ha demostrado el primer caso.

En este caso en que $A > 0$ se puede enunciar esta propiedad diciendo: *en un radical se puede multiplicar el índice y el exponente por un mismo número.*

Esta propiedad debe aplicarse tal como se ha enunciado si se quiere pasar de una forma a otra sin cometer errores.

Ejemplos:

- $\sqrt{2} = \sqrt[4]{2^2} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[8]{2^4} = \cdots$
- $-\sqrt{2} = -\sqrt[4]{2^2} = -\sqrt[6]{2^3} = -\sqrt[8]{2^4} = \cdots$
- $\sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[12]{2^4} = \sqrt[18]{2^6} =$
  $= \sqrt[9]{2^3} = \sqrt[15]{2^5} = \sqrt[21]{2^7}$
- $\sqrt[3]{-2} = -\sqrt[6]{(-2)^2} = -\sqrt[12]{(-2)^4} = -\sqrt[18]{(-2)^6} \cdots$
  $= \sqrt[9]{(-2)^3} = \sqrt[15]{(-2)^5} = \sqrt[21]{(-2)^7} \cdots$

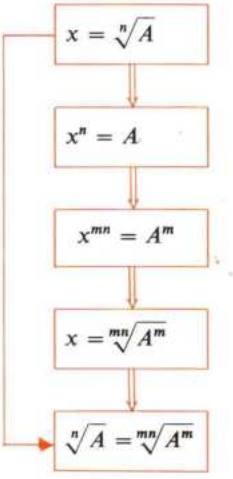
3.5. *Simplificación de radicales.*

La propiedad anterior nos permite pasar de un radical a otro de menor índice.

$$\sqrt[6]{125} = \sqrt[6]{5^3} = \sqrt{5}$$

$$\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = \sqrt[1]{2^1} = 2$$

Este proceso se llama *simplificación de radicales.*



10. Escribe en otras formas radicales:

a) $\sqrt[3]{-8}$

b) $\sqrt[5]{-7}$

c) $\sqrt{3}$

11. $\sqrt[3]{-8} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64}$. Es falso. ¿Dónde está el error?

$\sqrt{-4} = \sqrt[4]{(-4)^2} = \sqrt[4]{16}$. Es también falso. ¿Dónde está el error?

12. Simplifica lo más posible los números:

a) $\sqrt[4]{49}$ b) $\sqrt[6]{27}$ c) $\sqrt[10]{1024}$

Se llaman *radicales irreducibles* los radicales obtenidos al dividir el índice y el exponente del radical por el m.c.d. de ambos.

Ejemplo:

- Dividiendo por 6 = m. c. d. (18, 12), el índice y el exponente de $\sqrt[18]{2^{12}}$, resulta: $\sqrt[18]{2^2} = \sqrt[3]{4}$, que es un radical irreducible.

3.6. *Reducción de radicales a común índice.*

Aplicando la propiedad estudiada en **3.4.** los números radicales $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$ y $\sqrt[4]{5}$

se puede escribir del modo siguiente:

$$\sqrt[12]{64}\ ,\ \sqrt[12]{16},\ \text{y}\ \sqrt[12]{125}$$

que tienen el mismo índice, ya que

$$\sqrt{2} = \sqrt[4]{4} = \sqrt[6]{8} = \sqrt[8]{16} = +\sqrt[10]{32} = +\sqrt[12]{64} = \cdots$$

$$\sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{4} = \sqrt[9]{8} = \sqrt[12]{16} = \cdots$$

$$\sqrt[4]{5} = \sqrt[8]{25} = \sqrt[12]{125} = \cdots$$

En general, *dados varios radicales, se pueden elegir radicales iguales a los dados tomando como índice común un múltiplo de todos los índices.*

13. Comprueba si son iguales:

a) $-\sqrt{2}$ y $-\sqrt[6]{8}$

b) $-\sqrt[3]{8}$ y $-\sqrt[9]{512}$

c) $\sqrt[4]{16}$ y $-\sqrt[12]{4096}$

d) $\sqrt[3]{-8}$ y $-\sqrt[6]{64}$

e) $\sqrt[3]{-8}$ y $\sqrt[6]{64}$

f) $\sqrt[4]{-2}$ y $\sqrt[8]{4}$

14. Reduce a común índice

a) $\sqrt{3}$ y $\sqrt[3]{2}$

b) $\sqrt{3}$ y $-\sqrt{2}$

c) $\sqrt[3]{-3}$ y $\sqrt{2}$

15. Reduce a común índice

a) $\sqrt[5]{3}$, $-\sqrt[4]{5}$, $\sqrt[10]{12}$

b) $\sqrt[6]{12}$, $\sqrt[4]{2}$, $\sqrt[3]{-5}$

4 Multiplicación de radicales

4.1. Dados los radicales $\sqrt{A}$ y $\sqrt{B}$, se verifica:

$$\sqrt{A} \cdot \sqrt{B} = \sqrt{A \cdot B} \qquad [1]$$

El producto de dos radicales cuadráticos es otro radical cuadrático que tiene por radicando el producto de los radicandos de los factores.

En efecto: Sean x e y las raíces cuadradas de A y B, respectivamente, es decir,

$$\sqrt{A} = x \Leftrightarrow x^2 = A \ ; \ \sqrt{B} = y \Leftrightarrow y^2 = B$$

En la demostración esquemática de esta propiedad se ha aplicado la definición de radical cuadrático en ① y ④.

En ② se han multiplicado miembro a miembro las igualdades $x^2 = A$, $y^2 = B$.

¿Qué justificación tienen los pasos ③, ④ y ⑤? La igualdad [1], escrita en la forma $\sqrt{A \cdot B} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B}$

expresa que, *para hallar la raíz cuadrada de un producto se halla la raíz de cada factor y se multiplican los resultados.*

Ejemplos:

- $\underset{\substack{\| \\ 6}}{\sqrt{36}} \cdot \underset{\substack{\| \\ 2}}{\sqrt{4}} = \sqrt{36 \cdot 4} = \sqrt{144} = 12$
  $6 \cdot 2 = 12$
- $\sqrt{36} = \sqrt{9 \cdot 4} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{4} = 3 \cdot 2 = 6$
- $\sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{2} = 6 \cdot \sqrt{2}$

Vamos a calcular $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$; $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$

Empleando sucesiones resulta:

$$\sqrt{2} = (1, 1{,}4, 1{,}41, 1{,}414, 1{,}4142\ldots)$$

$$\sqrt{8} = (2, 2{,}8, 2{,}82, 2{,}828, 2{,}8284, \ldots)$$

luego $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = (2, 3{,}9, 3{,}97, 3{,}998, 3{,}9999, \ldots) = 4$

4.2. La propiedad estudiada en el punto anterior, para radicales cuadráticos, es válida para radicales de índice n, es decir,

$$\sqrt[n]{A} \cdot \sqrt[n]{B} = \sqrt[n]{A \cdot B}$$

La demostración no difiere en nada de la dada para radicales cuadráticos.

Ejemplo:

- $\underset{\substack{\| \\ 2}}{\sqrt[3]{8}} \cdot \underset{\substack{\| \\ 4}}{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[3]{8 \cdot 64} = \underset{\substack{\| \\ 8}}{\sqrt[3]{512}}$

Vamos a calcular de dos modos el producto $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{32}$

$$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4$$

pasando a las sucesiones decimales

$$\sqrt[3]{2} = (1, 1{,}2, 1{,}25, 1{,}259, 1{,}2599\ldots)$$

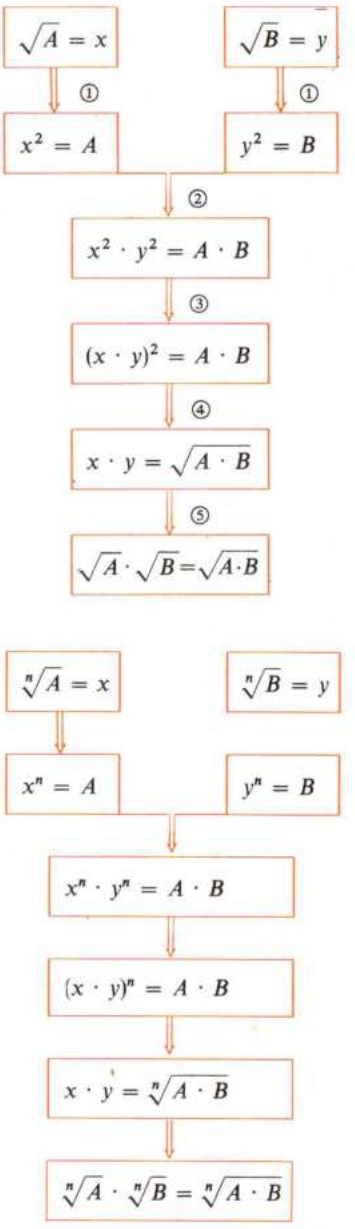
$$\sqrt[3]{32} = (3, 3{,}1, 3{,}17, 3{,}178, 3{,}1788\ldots)$$

resulta: $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{32} = (3, 3{,}7, 3{,}96, 3{,}996, 3{,}9999\ldots) = 4$

DEMOSTRACION

$$\begin{array}{ccc}
\boxed{\sqrt{A} = x} & & \boxed{\sqrt{B} = y} \\
\Downarrow ① & & \Downarrow ① \\
\boxed{x^2 = A} & & \boxed{y^2 = B} \\
& \Downarrow ② & \\
& \boxed{x^2 \cdot y^2 = A \cdot B} & \\
& \Downarrow ③ & \\
& \boxed{(x \cdot y)^2 = A \cdot B} & \\
& \Downarrow ④ & \\
& \boxed{x \cdot y = \sqrt{A \cdot B}} & \\
& \Downarrow ⑤ & \\
& \boxed{\sqrt{A} \cdot \sqrt{B} = \sqrt{A \cdot B}} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
\boxed{\sqrt[n]{A} = x} & & \boxed{\sqrt[n]{B} = y} \\
\Downarrow & & \\
\boxed{x^n = A} & & \boxed{y^n = B} \\
& \Downarrow & \\
& \boxed{x^n \cdot y^n = A \cdot B} & \\
& \Downarrow & \\
& \boxed{(x \cdot y)^n = A \cdot B} & \\
& \Downarrow & \\
& \boxed{x \cdot y = \sqrt[n]{A \cdot B}} & \\
& \Downarrow & \\
& \boxed{\sqrt[n]{A} \cdot \sqrt[n]{B} = \sqrt[n]{A \cdot B}} &
\end{array}$$



16. Comprueba que: $\sqrt{4} \cdot \sqrt{16} = \sqrt{64}$
Calculando la raíz de cada radical.

17. Efectua el producto
$\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}$

5 División de radicales

5.1. Dados los radicales $\sqrt{A}$ y $\sqrt{B}$, con $B \neq 0$, se verifica:

$$\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A}{B}} \qquad [1]$$

El cociente de dos radicales cuadráticos es otro radical cuadrático que tiene por radicando el cociente del radicando del dividendo y del divisor.

La demostración difiere muy poco de la dada para el caso de la multiplicación. El alumno no debe tener dificultad en justificar los pasos ①, ②, ③, ④ y ⑤.

¿Qué propiedad de las potencias se aplica en ③?

La igualdad [1] escrita en la forma

$$\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$$

expresa que *la raíz cuadrada de un cociente es igual al cociente de las raíces cuadradas del dividendo y del divisor.*

Ejemplos:

- $\dfrac{\sqrt{16}}{\sqrt{4}} = \sqrt{\dfrac{16}{4}} = \sqrt{4} = 2$

  $\| \qquad$

  $\dfrac{4}{2} = 2$

- $\dfrac{\sqrt{175}}{\sqrt{7}} = \sqrt{\dfrac{175}{7}} = \sqrt{25} = 5$

- $\sqrt{\dfrac{2}{25}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{25}} = \dfrac{\sqrt{2}}{5}$

Calculemos de dos modos diferentes $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}$

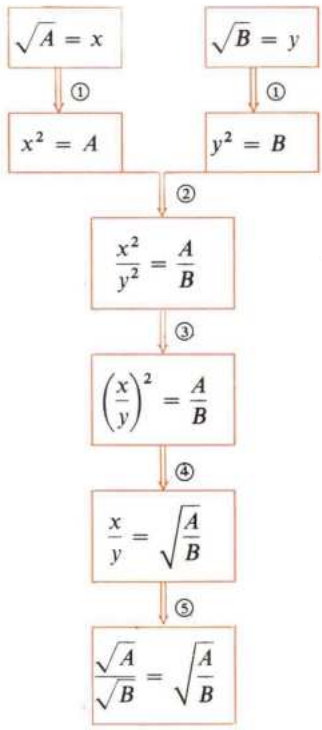
$$\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{27}{3}} = \sqrt{9} = 3$$

Pasando a sucesiones decimales:

$$\sqrt{27} = (5,\ 5{,}1,\ 5{,}19,\ 5{,}196,\ 5{,}1961,\ \ldots)$$

$$\sqrt{3} = (1,\ 1{,}7,\ 1{,}731,\ 1{,}732,\ 1{,}7320,\ \ldots)$$

por tanto $\sqrt{27} : \sqrt{3} = (5,\ 3,\ 3{,}3,\ 3{,}00005,\ \ldots) = 3$



18. Efectúa las siguientes divisiones:

a) $\dfrac{\sqrt{16}}{\sqrt{2}}$

b) $\dfrac{\sqrt{5}}{-\sqrt{20}}$

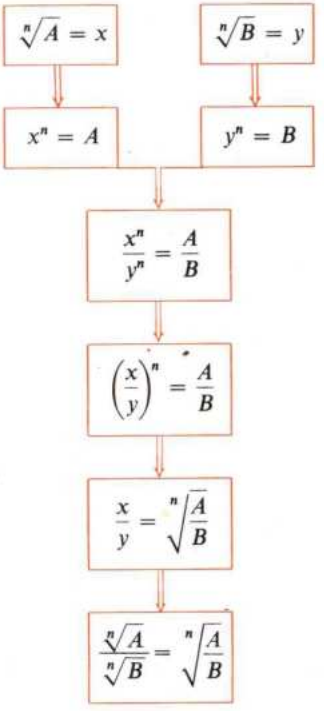
c) $\dfrac{\sqrt{216}}{\sqrt{16}}$

19. Calcula: $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}$

5.2. Dados los radicales $\sqrt[n]{A}$ y $\sqrt[n]{B}$, $B \neq 0$ se verifica:

$$\frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}} = \sqrt[n]{\frac{A}{B}}$$

La demostración es la misma que se dio para radicales cuadráticos. (Ver esquema del margen.)



Calculemos de dos modos diferentes $\dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}$

$$\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{16}{2}} = \sqrt[3]{8} = 2$$

Pasando a sucesiones decimales:

$$\sqrt[3]{16} = (2, 2{,}5, 2{,}51, 2{,}519, 2{,}5198, \ldots)$$
$$\sqrt[3]{2} = (1, 1{,}2, 1{,}25, 1{,}259, 1{,}2599, \ldots)$$

por tanto:

$$\sqrt[3]{16} : \sqrt[3]{2} = (2, 2{,}08, 2{,}008, 2{,}0008, \ldots) = 2$$

Ejemplos:

- $\dfrac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{8}} = \sqrt[3]{\dfrac{27}{8}} = \dfrac{3}{2}$

  $\| \quad \dfrac{3}{2}$

- $\dfrac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{256}} = \sqrt[4]{\dfrac{16}{256}} = \sqrt[4]{\dfrac{1}{16}} = \dfrac{1}{2}$

- Calculemos $\dfrac{\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2}}{\sqrt[6]{2^5}}$

  Como m. c. m. $(2, 3, 6) = 6$, tomaremos 6 como índice común.

$$\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2}}{\sqrt[6]{2^5}} = \frac{\sqrt[6]{2^3} \cdot \sqrt[6]{2^2}}{\sqrt[6]{2^5}} = \frac{\sqrt[6]{2^3 \cdot 2^2}}{\sqrt[6]{2^5}} = \frac{\sqrt[6]{2^5}}{\sqrt[6]{2^5}} = 1$$

20. Halla el cociente de

a) $\dfrac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}}$ b) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{20}}$

c) $\dfrac{\sqrt[3]{216}}{\sqrt[3]{8}}$ d) $\dfrac{-\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{8}}$

21. Halla los siguientes cocientes, reduciendo previamente a común índice:

a) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{8}}$ b) $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[5]{32}}$

c) $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt[5]{-16}}$ d) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt[3]{-125}}$

6 Forma típica de un radical

6.1. La propiedad $\sqrt[n]{A \cdot B} = \sqrt[n]{A} \cdot \sqrt[n]{B}$ nos permite transformar radicales y obtener expresiones de la forma $a \cdot \sqrt[n]{b}$, que frecuentemente se escriben $a\sqrt[n]{b}$.

Ejemplos:

- $\sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{2} = 6 \cdot \sqrt{2}$
- $-\sqrt{18} = -\sqrt{9 \cdot 2} = -\sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = -3 \cdot \sqrt{2}$
- $\sqrt[n]{a^n \cdot b} = \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{b} = a \cdot \sqrt[n]{b}$

El paso del primer miembro al segundo, en la igualdad

$$\sqrt[n]{a^n \cdot b} = a\sqrt[n]{b}$$

se llama *extraer factores fuera del radical.*

El paso del segundo miembro al primero se conoce con el nombre de *introducir factores bajo el signo radical.*

El número a, se llama coeficiente de la forma $a\sqrt[n]{b}$.

6.2. En el siguiente ejemplo se observa que un radical se puede expresar de varias formas, como $a\sqrt[n]{b}$.

Ejemplos:

- $\sqrt{72} = \sqrt{9 \cdot 8} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{8} = 3 \cdot \sqrt{8}$
- $\sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{2} = 6 \cdot \sqrt{2}$

$6\sqrt{2}$ se llama la forma típica de $\sqrt{72}$.

Un radical $\sqrt[n]{A}$ puede expresarse de varias formas, como $a\sqrt[n]{b}$. Si n y b son los menores posibles se dice que $a\sqrt[n]{b}$ es la forma típica de $\sqrt[n]{A}$

22. Reduce a la forma $a\sqrt[n]{b}$ los números radicales:

a) $\sqrt{8}$ d) $\sqrt[3]{24}$

b) $-\sqrt{8}$ e) $-\sqrt{50}$

c) $+\sqrt{20}$ f) $\sqrt[3]{108}$

23. Pasa a la forma $a\sqrt{b}$ los radicales

a) $\sqrt[3]{16}$; b) $\sqrt{32}$

24. Comprueba si son o no iguales los radicales

$+\sqrt{8}$ y $2\sqrt{2}$

$-\sqrt{2}$ y $(-1) \cdot \sqrt{2}$

25. Halla la forma típica de

a) $\sqrt{18}$ d) $\sqrt{75}$

b) $\sqrt{32}$ e) $\sqrt{200}$

c) $\sqrt{8}$ f) $\sqrt[3]{-81}$

7 El grupo aditivo de los radicales semejantes

7.1. *Dos radicales se dice que son semejantes si sus respectivas formas típicas tienen el mismo índice y el mismo radicando.*

Ejemplos:

- $\sqrt{8}$ y $\sqrt{2}$ son semejantes, ya que
$$\sqrt{8} = 2\sqrt{2} \quad \text{y} \quad \sqrt{2} = 1\sqrt{2}$$
- $\sqrt[3]{-16}$ y $\sqrt[3]{2}$ son radicales semejantes, porque
$$\sqrt[3]{-16} = (-2)\sqrt[3]{2} \quad \text{y} \quad \sqrt[3]{2} = 1\sqrt[3]{2}$$

7.2. *Dados dos radicales semejantes, la suma de ellos es otro radical semejante cuyo coeficiente es la suma de los coeficientes de los sumandos.*

Ejemplos:

- $8\sqrt[3]{2} - 3\sqrt[3]{2} = (8 - 3)\sqrt[3]{2} = 5\sqrt[3]{2}$
- $3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = (3 - 2)\sqrt{2} = 1\sqrt{2} = \sqrt{2}$
- $a\sqrt[n]{b} + b\sqrt[n]{b} = (a + b)\sqrt[n]{b}$

La adición de radicales es una operación interna en cada uno de los conjuntos de radicales semejantes.

Veamos las propiedades de la adición de radicales cuadráticos semejantes.

7.3. La adición de radicales semejantes es una operación *asociativa*.

$$(6\sqrt{2} + 4\sqrt{2}) + 3\sqrt{2} = 10\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 13\sqrt{2}$$
$$6\sqrt{2} + (4\sqrt{2} + 3\sqrt{2}) = 6\sqrt{2} + 7\sqrt{2} = 13\sqrt{2}$$

luego

$$(6\sqrt{2} + 4\sqrt{2}) + 3\sqrt{2} = 6\sqrt{2} + (4\sqrt{2} + 3\sqrt{2})$$

En general:

$$(a\sqrt{b} + c\sqrt{b}) + d\sqrt{b} = a\sqrt{b} + (c\sqrt{b} + d\sqrt{b})$$

7.4. La adición de radicales semejantes tiene elemento neutro.

$$6\sqrt{2} + 0\sqrt{2} = (6 + 0)\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$
$$a\sqrt{b} + 0\sqrt{b} = (a + 0)\sqrt{b} = a\sqrt{b}$$

26. Comprueba si son radicales semejantes

a) $\sqrt{18}$ y $\sqrt{8}$

b) $\sqrt[3]{54}$ y $\sqrt[3]{16}$

c) $\sqrt{72}$ y $\sqrt{32}$

d) $\sqrt[4]{32}$ y $\sqrt[4]{162}$

e) $\sqrt{8}$ y $\sqrt{2}$

27. Halla la suma siguiente:

$$3\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + 9\sqrt{2}$$

7.5. Todo radical cuadrático tiene un opuesto.

$2\sqrt{2}$ y $(-2)\sqrt{2}$ son radicales opuestos

$2\sqrt{7}$ y $(-2)\sqrt{7}$ son radicales opuestos

El opuesto de $a\sqrt{b}$ es $-a\sqrt{b}$

7.6. La adición de radicales es una operación conmutativa.

$$2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = (2 + 3)\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$
$$3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = (3 + 2)\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

En general:

$$a\sqrt{b} + c\sqrt{b} = c\sqrt{b} + a\sqrt{b}$$

Por tanto, el conjunto de los radicales de forma típica $a\sqrt{b}$ es un *grupo conmutativo* con la operación suma.

Lo mismo puede decirse para los radicales de forma típica $a\sqrt[m]{b}$.

28. Suma los radicales:

$$3\sqrt{8} - 2\sqrt{32}$$

29. Halla la suma de

$$\sqrt{12} + \sqrt{75} - \sqrt{3}$$

8 Potencias de radicales

8.1. Sea $\sqrt{A}$ un número radical.

Se verifica: $(\sqrt{A})^3 = \sqrt{A^3}$; en efecto

$$(\sqrt{A})^3 = \sqrt{A} \cdot \sqrt{A} \cdot \sqrt{A} = \sqrt{A \cdot A \cdot A} = \\ = \sqrt{A^3}$$

Del mismo modo dado un radical de índice n se verifica:

$$(\sqrt[n]{A})^k = \sqrt[n]{A^k}\text{, ya que:}$$

$$(\sqrt[n]{A})^k = \sqrt[n]{A} \cdot \sqrt[n]{A} \cdots \sqrt[n]{A} = \sqrt[n]{A \cdot A \cdot \overset{k}{\cdots} \cdot A} \\ = \sqrt[n]{A^k}.$$

Ejemplos:

- $(\sqrt{2})^3 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 2} = \sqrt{2^3}$
- $(\sqrt[3]{2})^4 = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \sqrt[3]{2^4}$

30. Aplica la propiedad del epígrafe **8.** a $(\sqrt[3]{2})^8$

31. Eleva al cuadrado $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[5]{9}$

32. Eleva al cubo $2\sqrt{3}$

33. Eleva al cuadrado $2 + \sqrt{3}$

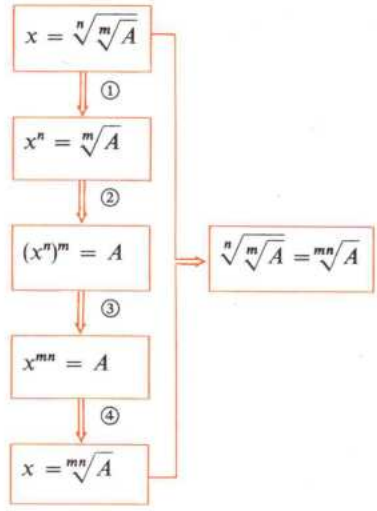
8.2. Sea $\sqrt[m]{A}$ un número radical.

Si se extrae la raíz n-ésima de $\sqrt[m]{A}$ se verifica: $\sqrt[n]{\sqrt[m]{A}} = \sqrt[mn]{A}$

La raíz n-ésima de la raíz m-ésima de un número es igual a la raíz mn-ésima del mismo.

Llamando $x = \sqrt[n]{\sqrt[m]{A}}$, se obtienen las equivalencias que se indican en la demostración esquemática del margen.

En los pasos ①, ② y ④ se utiliza la definición de raíz y en ③ se aplica una propiedad de las potencias de exponente natural. ¿Cuál es esta propiedad?



Ejemplos:

- $\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3]{8} = 2$
- $\sqrt[6]{64} = \sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3]{8} = 2$
- $\sqrt[8]{256} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{256}}} = \sqrt{\sqrt{16}} = \sqrt{4} = 2$
- $\sqrt[9]{729} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{729}} = \sqrt[3]{27} = 3$

9 Potencia de exponente racional

El radical $\sqrt[q]{a^p}$ puede escribirse en forma de potencia de exponente fraccionario $a^{\frac{p}{q}}$, es decir $\sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}}$

Con ayuda de las propiedades de los radicales, se pueden probar fácilmente las siguientes propiedades de estas potencias.

a) $(a \cdot b)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}} \cdot b^{\frac{p}{q}}$

b) $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{p}{q}} = \frac{a^{\frac{p}{q}}}{b^{\frac{p}{q}}}$

c) $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s}}$

d) $a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q} + \frac{r}{s}}$

e) $a^{\frac{p}{q}} : a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q} - \frac{r}{s}}$.

Al margen se han probado las propiedades a) y b); análogamente se pueden probar las demás.

a) $(a \cdot b)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(a \cdot b)^p} = \sqrt[q]{a^p \cdot b^p} =$
$= \sqrt[q]{a^p} \cdot \sqrt[q]{b^p} = a^{\frac{p}{q}} \cdot b^{\frac{p}{q}}$

b) $a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = \sqrt[q]{a^p} \cdot \sqrt[s]{a^r} = \sqrt[qs]{a^{ps}} \cdot \sqrt[sq]{a^{rq}} =$
$= \sqrt[qs]{a^{ps} \cdot a^{rq}} = \sqrt[qs]{a^{pq+rq}} =$
$= a^{\left(\frac{pq+rq}{qs}\right)} = a^{\left(\frac{pq}{qs}+\frac{rq}{qs}\right)} = a^{\left(\frac{p}{q}+\frac{r}{s}\right)}$

10 Racionalización de denominadores con radicales

10.1. Con frecuencia aparecen fracciones como

$\frac{5}{\sqrt{3}}$, $\frac{4}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$, cuyos denominadores son una o varias raíces cuadradas.

Como es más fácil operar con fracciones sin raíces en el denominador, se pueden reducir aquéllas a otras fracciones equivalentes, cuyos denominadores sean números racionales.

Primer caso. *El denominador no incluye sumas ni restas.*

Se multiplican los dos términos de la fracción por el denominador:

$$\frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{5\cdot\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{5\ \sqrt{3}}{3}$$

Segundo caso. *El denominador incluye sumas y restas.*

Se multiplican los dos términos de la fracción por el radical conjugado del denominador, que se obtiene cambiando el signo + de uno de los sumandos por el signo −, y viceversa.

$$\frac{4}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{4\cdot(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})\cdot(\sqrt{5}+\sqrt{3})} =$$

$$= \frac{4(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{4(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{5-3} = \frac{(4\sqrt{5}+\sqrt{3})}{2} = 2(\sqrt{5}+\sqrt{3})$$

La reducción de fracciones con radicales en el denominador a fracciones equivalentes, cuyos denominadores sean racionales, se llama «racionalización de denominadores».

10.2. Para racionalizar $\frac{1}{\sqrt[n]{a^p}}$ se multiplica numerador y denominador por $\sqrt[n]{a^{n-p}}$.

En efecto:

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a^p}} = \frac{\sqrt[n]{a^{n-p}}}{\sqrt[n]{a^p}\cdot\sqrt[n]{a^{n-p}}} = \frac{\sqrt[n]{a^{n-p}}}{\sqrt[n]{a^n}} = \frac{\sqrt[n]{a^{n-p}}}{a}$$

Ejemplo:

- $\frac{1}{\sqrt[3]{1}} = \frac{1\cdot\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}} = \frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a^3}} = \frac{\sqrt[3]{a^2}}{a}$

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\cdot\sqrt{b}}{\sqrt{b}\cdot\sqrt{b}} = \frac{a\cdot\sqrt{b}}{(\sqrt{b})^2} = \frac{a\ \sqrt{b}}{b}$$

$$\frac{a}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{a\cdot(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})\cdot(\sqrt{a}+\sqrt{b})} = \frac{a\cdot(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2} = \frac{a\ (\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b}$$

34. Racionaliza:

a) $\frac{6}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{8}{\sqrt{5}}$ c) $\frac{6}{\sqrt{3}}$

35. Racionaliza:

a) $\frac{8}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$ b) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ c) $\frac{4}{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}$

36. Halla $\frac{1}{\sqrt{2}}$ con cuatro cifras decimales.

37. Racionaliza:

a) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{8}}$ c) $\frac{1}{\sqrt[5]{2^3}}$

Ejercicios y cuestiones

38. Comprueba si son iguales los radicales $\sqrt[3]{-8}$ y $\sqrt[6]{-64}$ ¿Por qué?

39. Sabiendo que no existe $\sqrt{-4}$ en el cuerpo de los números reales observa las igualdades y di dónde está el error

$$\sqrt{(-4)} = \sqrt[4]{(-4)^2} = \sqrt[4]{16} = 2$$

40. Demuestra pasando a radicales que

$$a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} - \frac{p}{q}}$$

indicando en cada paso la propiedad utilizada.

41. a) Halla $\sqrt{\sqrt{\sqrt{256}}}$

b) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{256}}} = \sqrt[m]{256}$ ¿Cuánto vale m?

42. Calcula:

a) $\sqrt{100}$ b) $\sqrt{10.000}$ c) $\sqrt{1.000.000}$ d) $\sqrt{100.000.000}$ e) $\sqrt{169 \cdot 225 \cdot 196}$

f) $\sqrt{\frac{25}{9}}$ g) $\sqrt{\frac{625}{4}}$

43. Haz las operaciones indicadas

a) $3\sqrt{5} - 4\sqrt{5} + \sqrt{5} + 2\sqrt{5}$

b) $3\sqrt{6} - 2\sqrt{6} + 4\sqrt{6}$

c) $\frac{2}{3}\sqrt{3} - 8\sqrt{3} + \frac{4}{3}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{3}$

d) $6\sqrt{10} + 5\sqrt{90} - 3\sqrt{10}$

44. Haz las operaciones que se indican

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{5}$ b) $2\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{2}$ c) $\sqrt{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt{\frac{4}{3}} \cdot \sqrt{2}$

d) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[6]{\frac{1}{25}}$ e) $\sqrt{\frac{3}{2}} : \sqrt{\frac{2}{27}}$ f) $(\sqrt[3]{2})^6$

45. Racionaliza:

a) $\frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$ b) $\frac{1}{2\sqrt{5} - 2}$ c) $\frac{1}{\sqrt{5} - 2\sqrt{2}}$ d) $\frac{6}{\sqrt{6}}$ e) $\frac{6}{\sqrt[3]{6}}$

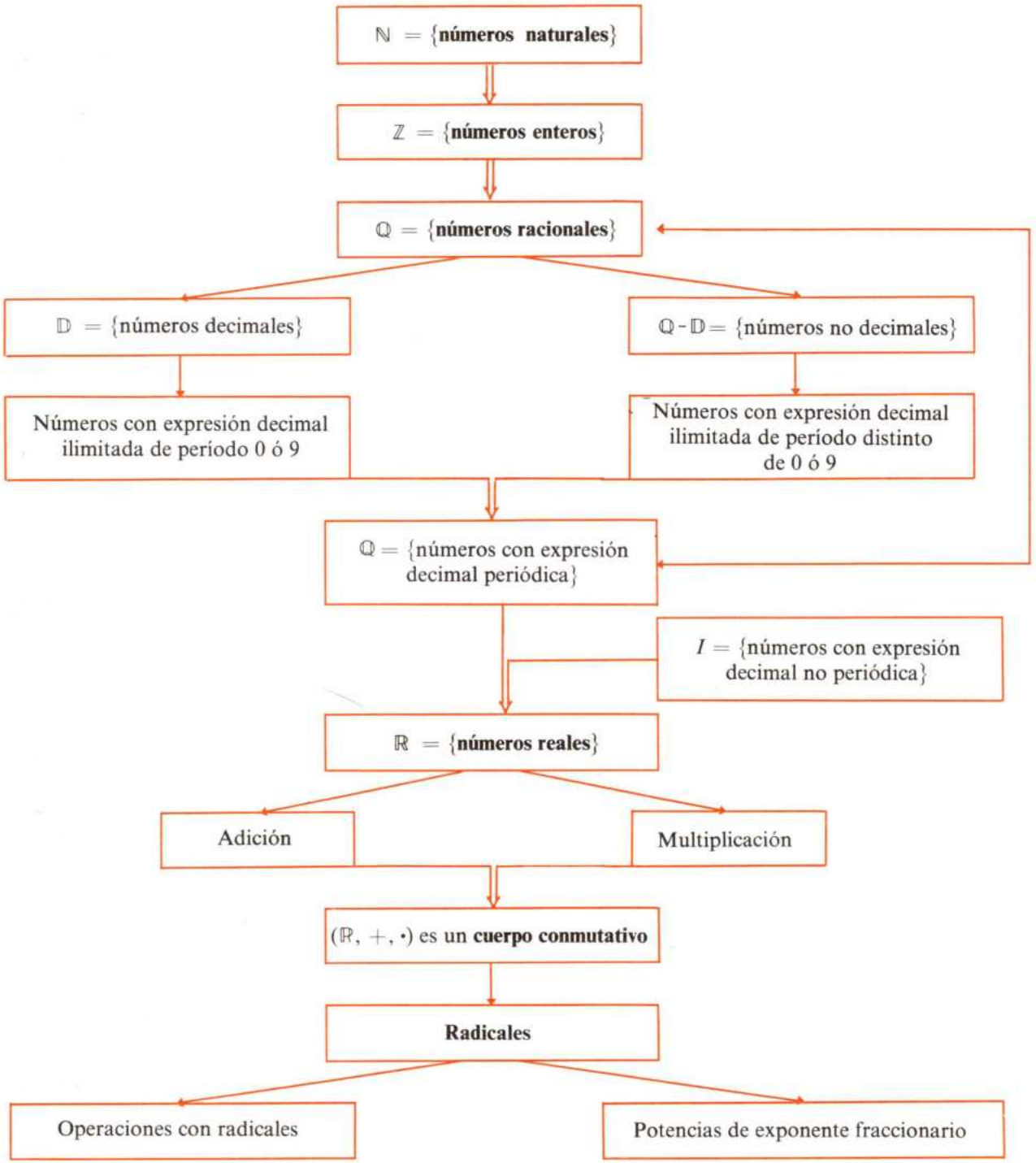
46. Extrae factores fuera del radicando y suma:

a) $\sqrt{2} + \sqrt{32} + 5\sqrt{8}$ b) $3\sqrt{20} + 2\sqrt{5}$ c) $2\sqrt{27} - 4\sqrt{12}$

d) $3\sqrt{28} - 2\sqrt{7}$ e) $\sqrt{700} - 2\sqrt{63}$

DIAGRAMA ESTRUCTURAL DE LA UNIDAD

NUMEROS REALES



Unidad 4

POLINOMIOS

En los cursos anteriores, el alumno ya ha encontrado al estudiar la resolución de las ecuaciones de primero y segundo grados, expresiones de la forma $a_1x + a_0$ o $a_2x^2 + a_1x + a_0$. Si nos proponemos buscar un número tal que su cubo más diez veces el número sea 28, podemos considerar la expresión $x^3 + 10x - 28$; si un tal número α existe debe verificar $\alpha^3 + 10\alpha - 28 = 0$; vemos entonces que el problema se reduce a resolver la ecuación $x^3 + 10x - 28 = 0$, lo cual conduce a una expresión de la forma

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \quad \text{donde} \quad a_3 = 1,\ a_2 = 0,\ a_1 = 10 \text{ y } a_0 = -28.$$

Parece entonces lógico estudiar las expresiones de la forma

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + x + a_0$$

donde los números $a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$ y x representa *no* un número real sino un símbolo que opera con los elementos de $\mathbb{R}$ con las propiedades usuales de los anillos conmutativos y unitarios.

En el primer tema vamos a dar una definición precisa del concepto de polinomio, grado, coeficientes, etc. y mediante las definiciones de suma y producto de polinomios, dotamos al conjunto de éstos de una estructura de anillo conmutativo y unitario, que se designará por $\mathbb{R}[x]$.

En el segundo tema se estudiará la divisibilidad en $\mathbb{R}[x]$ de una forma paralela a como se realiza en $\mathbb{Z}$.

El tercer tema está dedicado al estudio del cuerpo de las razones algebraicas como extensión de la división exacta, no siempre posible en el anillo de polinomios.

Tema 10

1. Definición de polinomio con coeficientes reales.
2. Tipos especiales de polinomios.
3. Grado de un polinomio.
4. Igualdad de polinomios.
5. Forma canónica de un polinomio.
6. Adición de polinomios.
7. Propiedades de adición de polinomios.
8. El grupo $(\mathbb{R}[\times], +)$.
9. Sustracción de polinomios.
10. Multiplicación de polinomios.
11. Propiedades de la multiplicación de polinomios.
12. El anillo de los polinomios con coeficientes reales.
13. Binomio de Newton.

Tema 11

1. La relación de divisibilidad en $\mathbb{Z}$.
2. Propiedades de la relación $|$ en $\mathbb{Z}$.
3. La relación de divisibilidad en $\mathbb{R}[x]$.
4. Propiedades de la relación $|$ en $\mathbb{R}[x]$.
5. División con resto
6. Regla de Ruffini.
7. Valor numérico de un polinomio.
8. Resto de la división de un polinomio por $x - a$.
9. Factorización de polinomios.
10. Polinomios irreducibles.
11. Teorema de factorización.

Tema 12

1. Fracciones algebraicas.
2. Equivalencia de fracciones algebraicas.
3. Adición de razones algebraicas.
4. Propiedades de la adición de razones algebraicas.
5. Sustracción de razones algebraicas.
6. El grupo $(\mathbb{R}(x), +)$.
7. Multiplicación de razones algebraicas.
8. Propiedades de la multiplicación de razones algebraicas.
9. El anillo $(\mathbb{R}(x), +, \cdot)$.
10. Elemento inverso.
11. División de razones algebraicas.
12. El cuerpo $(\mathbb{R}(x), +, \cdot)$.
13. Isomorfismo de $\mathbb{R}[x]$ en una parte de $\mathbb{R}(x)$.

Tema 10 EL ANILLO DE LOS POLINOMIOS

En este tema se estudia el conjunto de los polinomios en una indeterminada con coeficientes en $\mathbb{R}$, este conjunto se representa por $\mathbb{R}[x]$.

En el conjunto se definen una suma y un producto que confieren a $\mathbb{R}[x]$ una estructura de anillo conmutativo y unitario.

Como un polinomio (en su forma canónica) queda determinado por sus coeficientes, se puede ignorar la indeterminada y operar con polinomios dados exclusivamente por sus coeficientes.

1 Definición de polinomio con coeficientes reales

1.1. Sea $\mathbb{R}$ el cuerpo de los números reales, x un símbolo tal que $x \notin \mathbb{R}$ y al que llamaremos *indeterminada.*

Definición: *Un polinomio es una expresión formal finita de la forma*

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \quad \text{con} \quad a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$$

y en la que cada x^i, $i = 1, 2, \ldots, n$ aparece a lo sumo una vez.

En el polinomio $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, los números $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son sus *coeficientes;* el coeficiente a_i, que precede a x^i, se llama el *i-ésimo coeficiente* del polinomio o el *coeficiente de grado i.*

El coeficiente a_0 es el *término independiente.*

El coeficiente de la mayor potencia de la indeterminada se llama *coeficiente principal.*

Ejemplo:

- Consideremos el polinomio $-x^2 + 3x^5 - 4x^3$, entonces su término independiente es 0, y su coeficiente principal es 3. Como se ve todos los coeficientes son 0 excepto el de grado 2 que es -1; el de grado 3 que es -4 y el de grado 5 que es 3.

El conjunto de todos los polinomios con coeficientes reales se representa por $\mathbb{R}[x]$.

1. Se considerarán los polinomios:

$$4 + x - 3x^7 + 6x^2 \quad \text{y} \quad 3 + 6x - 5x^4$$

Halla en ambos el término independiente, el coeficiente principal y el coeficiente de grado 2.

1.2. Se ha definido un polinomio como una expresión finita de la forma

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

para mayor comodidad en algunas cuestiones, se conviene en decir que si una potencia de la indeterminada no aparece en la expresión del polinomio, su coeficiente es cero; con esta convención un polinomio se puede escribir como una suma infinita, en la que todos sus coeficientes son cero, excepto a lo sumo un número finito.

Así, el polinomio $3 + 2x + 4x^3$ se puede escribir

$$3 + 2x + 0x^2 + 4x^3 + 0x^4 + 0x^5 + \cdots$$

2 Tipos especiales de polinomios

Se llama *polinomio cero*, y lo designaremos por **0**, a aquél que tiene todos sus coeficientes cero.

Un polinomio se dice que es un *monomio* si todos sus coeficientes, excepto uno, son cero; si son cero todos sus coeficientes, excepto dos, se dice que es un *binomio*. Finalmente, si el polinomio tiene sólo tres coeficientes distintos de cero se dice que es un *trinomio*.

Ejemplo:

- Los polinomios $-x, 2x^3, 4$, son monomios; los polinomios $x + 2$, $6x^3 - 5$, $4x^2 + 8$ son binomios y los polinomios $x^2 + 6x - 8$, $3x^3 + 4x + 1$, $6 + 8x^5 - 7x$ son trinomios.

2. De los siguientes polinomios indica los que son monomios, binomios o trinomios.

a) $2x - 3x^2$
b) $1 - x + x^2$
c) $5x$
d) $2x$
e) $4 + x - x^2$

3 Grado de un polinomio

Se llama grado de un polinomio distinto del polinomio cero, al exponente de la mayor potencia de la indeterminada cuyo coeficiente sea distinto de cero.

El grado del polinomio $x^5 - 3x^3 + 7x$ es 5; el grado de $-1 + x^2$ es 2, y el del monomio 4 es 0.

Obsérvese que el polinomio cero *no* tiene grado.

Si hablamos de un polinomio genérico en el que no es necesario especificar los coeficientes, el polinomio se escribirá $f(x)$ o simplemente f; en este caso el grado de f se escribe ∂f.

3. Dados los polinomios:

$$f(x) = 3x - 2x^5 + 1$$
$$g(x) = x + 18x^6 - 3x^3,$$

halla en ambos: a) el término independiente; b) el grado; c) el coeficiente principal; d) el coeficiente de grado 7; e) el término de grado 5.

Un polinomio de grado cero se llama *constante;* estos polinomios son de la forma a_0 con $a_0 \in \mathbb{R}$.

En el polinomio $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ se llama *término de grado i* al monomio a_ix^i.

Ejemplo:

- Consideremos el polinomio

$$f(x) = 1 + 2x - \frac{2}{3}x^4 + 6x^{10} - 8x^3$$

entonces el término de grado 2 es $0x^2 = 0$, y el de grado 4 es $-\frac{2}{3}x^4$. ¿Cuál es el término de grado 10?

4. En el polinomio

$$3 + 2x - 0x^2 + 0x^3 - 5x^4,$$

¿cuál es el término de grado 4?, ¿y el de grado 2?

4 Igualdad de polinomios

Sean f y g dos polinomios,

$f = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ y $g = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n$

Se dice que f y g son *iguales*, y se escribe $f = g$, si se verifican las dos condiciones siguientes:

(a) $\partial f = \partial g$, (tienen el mismo grado).

(b) Los coeficientes del mismo grado de f y g son iguales.

Ejemplos:

- Sean $f = 3x - 5x^4 + 6x^2$, $g = 3x + 6x^2 - 5x^4$,

entonces

$$\begin{aligned} \text{gr}\,(f) &= 4 = \text{gr}\,(g) \\ \delta f &= 4 = \delta g \end{aligned}$$

y además se observa que los coeficientes del mismo grado son iguales:

Coeficientes de f	*Coeficientes de g*
de grado 0 es el 0	de grado 0 es el 0
de grado 1 es el 3	de grado 1 es el 3
de grado 2 es el 6	de grado 2 es el 6
de grado 3 es el 0	de grado 3 es el 0
de grado 4 es el 5	de grado 4 es el 5

Luego $f = g$.

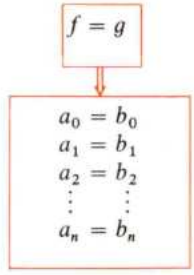
- Sean los polinomios

$$f = 3 - 3x + 2x^5 \quad \text{y} \quad g = 4 - 3x + 2x^5$$

entonces $\delta f = 5 = \delta g$

pero el coeficiente de grado cero de f es 3 y el de g es 4, luego f y g *no* son iguales.

$$\begin{aligned} f &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \\ g &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n \end{aligned}$$



5. Entre los polinomios siguientes indica los que son iguales:

$$\begin{aligned} f &= 3 - 3x + 7x^5 - 4x^2 \\ g &= -3x + 3 - 4x^2 + 7x^5 \\ h &= 3 - 3x + 7x^5 \end{aligned}$$

5 Forma canónica de un polinomio

La relación «...*ser iguales*...» entre polinomios es una relación de equivalencia en $\mathbb{R}[x]$.

Para cada clase de equivalencia de esta relación se elige como *representante canónico* el polinomio de la clase que está escrito en orden creciente de potencias de la indeterminada; dicho representante canónico se llama *forma canónica del polinomio.*

Ejemplo:

- La forma canónica del polinomio $-3 + 6x^2 - 5x + 7x^3 - 5x^4$ es $-3 - 5x + 6x^2 + 7x^3 - 5x^4$; de forma análoga la del polinomio $6x^3 - 5x$ es $-5x + 6x^3$.

Por tanto, todo polinomio escrito en forma canónica

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \quad [1]$$

queda determinado por la $n-pla$

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n) \quad [2]$$

Si completamos el polinomio con los términos de coeficiente nulo se obtiene:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + 0x^{n+1} + \cdots \quad [3]$$

y entonces queda biunivocamente determinado por la sucesión

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots) \quad [4]$$

en la que a partir del término n-ésimo todos son nulos.

En adelante se emplearán indistintamente cualquiera de las notaciones [1], [2], [3] y [4].

Ejemplos:

- El polinomio $f = 2 - 3x + 5x^2 + 6x^4 - x^5$ *queda determinado por el conjunto ordenado de sus coeficientes*, por esta razón el polinomio f se puede escribir prescindiendo de la indeterminada x

$$f = (2, -3, 5, 0, 6, -1, 0, 0, \ldots),$$

- Vamos a escribir los polinomios g, h y k, dados por sus coeficientes, con la indeterminada x.

$$g = (-1, 0, 3, 0, 4, 0, 0, 0, \ldots)$$
$$h = (0, 0, -2, 0, 0, \ldots, 0, \ldots)$$
$$k = (-1, 0, 1, 0, 1, 0, -1, 0, 0, \ldots, 0, \ldots)$$
$$g = -1 + 0x^2 + 3x^2 + 0x^3 + 4x^4 + 0x^5 + 0x^6 + \cdots =$$
$$= -1 + 3x^2 + 4x^4$$
$$h = 0 + 0x - 2x^2 + 0x^3 + 0x^4 + \cdots = -2x^2$$
$$k = -1 + 0x + 1x^2 + 0x^3 + 1x^4 + 0x^5 - 1x^6 + 0x^7 =$$
$$= -1 + x^2 + x^4 - x^6$$

6. Escribe en forma canónica todos los polinomios que aparecen en los ejemplos y ejercicios de los apartados anteriores.

7. Escribe el polinomio

$$f = (0, 2, -4, 0, 3, 0, -0\ldots)$$

con la indeterminada x. ¿Cuántos términos tiene el polinomio f? ¿Cuál es el grado de este polinomio?

8. Escribe los siguientes polinomios con la indeterminada x

$(a_0, a_1, a_2, a_3, 0, 0, \ldots)$, $(b_0, b_1, b_2, 0, 0, 0 \ldots 0)$.

Observa después, que el grado de un polinomio es igual al subíndice correspondiente al último coeficiente distinto de cero.

9. Escribe los polinomios siguientes con la indeterminada x y calcula el grado de cada uno

$(0, 3, 0, \ldots)$, $(2, 0, 0, \ldots)$, $(0, 0, 4, 0, 0, \ldots)$,
$(5, 3, 0, 0, \ldots)$, $(6, 0, 3, 0, \ldots)$
$(0, 0, 3, 0, 2, 0, \ldots)$

Observa que los tres primeros son monomios y los tres últimos son binomios.

10. Los siguientes polinomios son de grado 0

$(a_0, 0, 0, \ldots)$, $(2, 0, 0, \ldots)$, $(3, 0, 0, \ldots)$.

Escribe tres polinomios más de grado cero. Si P_0 es el conjunto de todos los polinomios de grado cero y $\mathbb{R}[x]$ el conjunto de todos los polinomios, ¿cuál de estas relaciones es cierta?

$$P_0 \in \mathbb{R}[x]; \quad P_0 \subset \mathbb{R}[x]$$

11. Los polinomios de grado cero se caracterizan porque todos los coeficientes de grado mayor o igual que 1 son cero y $a_0 \in \mathbb{R}^*$. La aplicación $f : \mathbb{R}^* \to P_0$, definida por

$$f(a) = (a, 0, 0, \ldots)$$

es una biyección de $\mathbb{R}^*$ en P_0. Demuéstralo.

6 Adición de polinomios

Sean f y g dos polinomios

$$f = (a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n 0, 0, \ldots)$$
$$g = (b_0, b_1, b_2, b_3, \ldots, b_p, 0, 0, \ldots)$$

Se llama suma de f y g, y se designa por $f + g$, al polinomio $(a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2 + b_2, a_3 + b_3, \ldots, a_i + b_i, \ldots)$, es decir, el polinomio $f + g$ tiene por coeficiente i-ésimo la suma de los coeficientes i-ésimos de f y de g.

Ejemplos:

- Sean $f = x - 3x^2 + 5x^4$, $g = x + 2x^4 + x^6$

  Prescindiendo de la indeterminada x

$$\begin{array}{r} f = (0, 1, -3, 0, 5, 0, \quad 0, 0, \ldots) \\ g = (0, 1, \quad 0, 0, 2, 0, -1, 0, \ldots) \\ \hline f + g = (0, 2, -3, 0, 7, 0, -1, 0, \ldots) \end{array}$$

  es decir,

$$f + g = 0 + 2x - 3x^2 + 0x^3 + 7x^4 + 0x^5 - 1x^6 + 0x^7 + \cdots = \\ = 2x - 3x^2 + 7x^4 - x^6$$

- El mismo resultado se obtiene conservando la indeterminada:

$$\begin{array}{r} f = 0 + 1x - 3x^2 + 0x^3 + 5x^4 \\ g = 0 + 1x + 0x^2 + 0x^3 + 2x^4 + 0x^5 - x^6 \\ \hline f + g = 0 + 2x - 3x^2 + 0x^3 + 7x^4 + 0x^5 - x^6 = \\ = 2x - 3x^2 + 7x^4 - x^6 \end{array}$$

Con los polinomios f y g se verifica que el grado de $f + g$ es el mayor de los grados de estos polinomios, es decir,

$$\partial(f + g) = \max(\partial f, \partial g)$$

Esto no es siempre cierto como se ve a continuación.

Ejemplo:

- Calculemos la suma de los polinomios f y g, sea:

$$\begin{array}{r} f = 3 + 6x + 6x^2 + 0x^3 + 0x^4 - 7x^5 \\ g = 6 + 4x + 2x^2 - 3x^3 + 0x^4 + 7x^5 \\ \hline f + g = 9 + 10x + 8x^2 - 3x^3 \end{array}$$

En este caso se verifica:

$$\partial(f + g) = 3 < \max(\partial f, \partial g) = 5$$

En general, si $f + g \neq \mathbf{0}$ se verifica:

$$\partial(f + g) \leqslant \max(\partial f, \partial g)$$

El grado del polinomio suma $f + g$ es menor o igual que el mayor de los grados de f y g.

12. Sean los polinomios

$$p = (0, 0, -4, -6, 0, \ldots)$$
$$q = (0, -8, 6, 0, \ldots)$$
$$r = (-1, 2, 0, 0, \ldots)$$

Calcula:

a) $p + q$; b) $p + r$; c) $q + r$.

13. Suma los polinomios f y g siendo:

$$f = x + 6x^3 + 3x^4 - 8x^5$$
$$g = x + 3x^3 - x^5$$

14. Suma los polinomios

$$m = x + 6x^2 - 7x^3 + 8x^6$$
$$p = x - 6x^2 - 7x^3 + 8x^6$$
$$q = -x - 6x^2 + 7x^3 - 8x^6.$$

15. Sean los polinomios:

$$f = x + 3x^2 - 4x^4$$
$$g = -x + 3x^3 + x^5$$
$$h = x^2 + 6x^5$$

Calcula $f + (g + h)$ y $(f + g) + h$, y compara los resultados.

7 Propiedades de la adición de polinomios

La suma de polinomios tiene las siguientes propiedades:

7.1. *Asociativa.*
Si f, g y h son tres polinomios cualesquiera

$$f + (g + h) = (f + g) + h$$

Sean

$$f = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_r, 0, 0, \ldots)$$
$$g = (b_0, b_1, b_2, \ldots, b_p, 0, 0, \ldots)$$
$$h = (c_0, c_1, c_2, \ldots, c_t, 0, 0, \ldots)$$

El coeficiente de grado i de $f + (g + h)$ es $a_i + (b_i + c_i)$

El coeficiente de grado i de $(f + g) + h$ es $(a_i + b_i) + c_i$.
Como a_i, b_i, c_i son números reales, y la suma de números reales es asociativa, resulta que $a_i + (b_i + c_i) = (a_i + b_i) + c_i$,

es decir, los polinomios $f + (g + h)$ y $(f + g) + h$

tienen iguales los coeficientes del mismo grado y por consiguiente ambos polinomios tienen el mismo grado, luego

$$f + (g + h) = (f + g) + h$$

7.2. *Conmutativa.*
Sean f y g dos polinomios cualesquiera $f, g \in \mathbb{R}[x]$

$$f + g = g + f$$

En efecto, el coeficiente de grado i de $f + g$ es $a_i + b_i$, y el coeficiente de grado i de $g + f$ es $b_i + a_i$.

Como $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ se verifica:

$$a_i + b_i = b_i + a_i$$

Luego ambos polinomios son iguales.

7.3. *Existe elemento neutro* que es el polinomio

$$\mathbf{0} = (0, 0, \ldots)$$

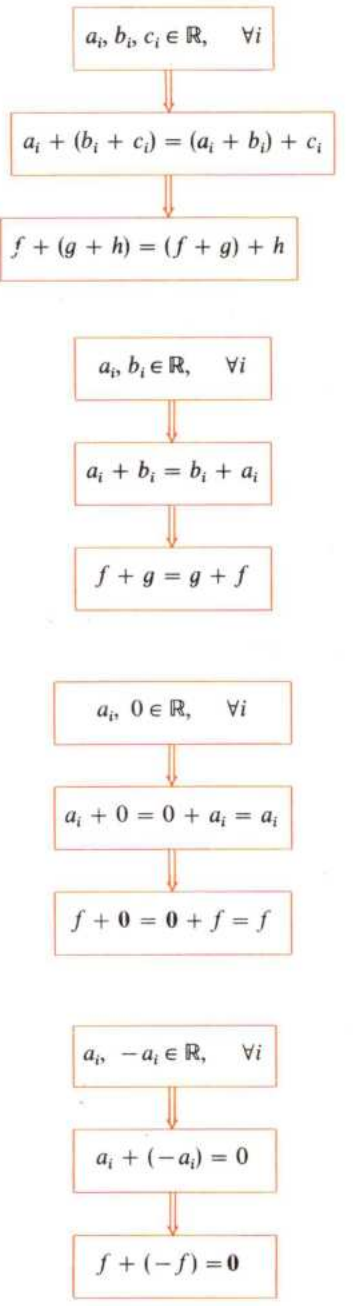
$f + \mathbf{0} = \mathbf{0} + f = f$, ya que el coeficiente de grado i de $f + \mathbf{0}$ es $a_i + 0 = a_i$.

7.4. *Todo polinomio posee un opuesto.*

El opuesto del polinomio $f = (a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_r, 0, 0, \ldots)$ es $-f = (-a_0, -a_1, -a_2, -a_3, \ldots, -a_r, 0, 0, \ldots)$

ya que

$$f + (-f) = (0, 0, 0, \ldots) = \mathbf{0}$$



16. Escribe el polinomio $\mathbf{0}$ con la indeterminada x. ¿Cuál es el opuesto de $\mathbf{0}$.?

8 El grupo $(\mathbb{R}[x], +)$

Las propiedades de la adición estudiadas anteriormente permiten afirmar que el par $(\mathbb{R}[x], +)$ es un *grupo abeliano.*

CONJUNTO $\mathbb{R}[x]$ = {**polinomios en** x}				
$f, g, h \in \mathbb{R}[x]$		OPERACION DEFINIDA: ADICION $(+)$	Grupo	Grupo Abeliano
PROPIEDADES	**Asociativa**	$(f+g)+h=f+(g+h)$		
	Elemento neutro 0	$f+\mathbf{0}=\mathbf{0}+f=f$		
	Cada polinomio f tiene opuesto $-f$	$f+(-f)=\mathbf{0}$		
	Conmutativa	$f+g=g+f$		

El grupo $(\mathbb{R}[x], +)$ se llama el *grupo aditivo de los polinomios con coeficientes reales.*

9 Sustracción de polinomios

Como en todo grupo, dados $f, g \in \mathbb{R}[x]$ se define la *diferencia* $f - g$ como $f + (-g)$

$$f - g = f + (-g)$$

Ejemplo:

- Sea $f = 6 + 2x - 3x^2$ y $g = 4 - x + 3x^5 + 6x^6$

  entonces

  $$-g = -4 + x - 3x^5 - 6x^6 \quad \text{y} \quad f - g = f + (-g) = \\ = 2 + 3x - 3x^2 - 3x^5 - 6x^6$$

Nota: Obsérvese que según nuestra definición de polinomios, la expresión (1) $3x^2 - 6x^5 + 4x^2$ *no* es un polinomio, sin embargo, podemos darle un significado de la siguiente forma, *todo polinomio* $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_rx^r$ *puede considerarse como suma de los monomios* $a_0, a_1x, \ldots, a_rx^r$, de aquí que la expresión dada puede considerarse como suma de los monomios $3x^2, -6x^5, 4x^2$, y aplicando la definición de adición y sus propiedades se tiene:

$$(3x^2) + (-6x^5) + (4x^2) = (3x^2) + (4x^2) + (-6x^5) = 7x^2 - 6x^5$$

que sí es un polinomio. Este proceso se llama *obtención de un polinomio por reducción de términos semejantes.*

17. Escribe los opuestos de los polinomios

$$f(x), \quad g(x) \quad \text{y} \quad h(x)$$

$f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 6x - 1$
$g(x) = -5x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 4x - 1$
$h(x) = x^3 - x^2 + 2x$

y calcula: $f + (-g)$, $f - h$, $f + (-f)$.

18. Los monomios $4x^3$ y $6x^3$ tienen el mismo grado y se dice que son semejantes. Escribe tres monomios semejantes a $-2x^5$.

19. Sea $f = x - 2x^2 + 3x^4$. Halla $-f$ y comprueba que $f + (-f) = \mathbf{0}$.

20. Demuestra o comprueba con un ejemplo que $-(-f) = f$. Comprueba que $-(f - g) = g - f$, con los polinomios f y g del ejercicio **17.**

10 Multiplicación de polinomios.

10.1. Sea $f = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ un polinomio y cx^m un monomio; se define el *producto del polinomio f por el monomio* cx^m como el polinomio

$$a_0cx^m + a_1cx^{m+1} + \cdots + a_ncx^{m+n}$$

es decir, el polinomio que tiene por coeficiente de grado

$$m + i,\ a_i \cdot c \quad \text{con} \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

Ejemplos:

- Sea $f = x^2 + 6x^3 - 7x^4$ y sea el monomio $+2x^3$, entonces el producto es el polinomio $2x^3f = 2x^5 + 12x^6 - 14x^7$.
- ¿Existe un monomio tal que el producto por el polinomio $x + 2x^3 - 5x^4$ sea el polinomio $x^2 + 2x^4 - 5x^5$?

  Sea dicho monomio cx^n, entonces:

  $$(x + 2x^3 - 5x^4)cx^n = x^2 + 2x^4 - 5x^5,$$

  es decir

  $$cx^{1+n} + 2cx^{3+n} - 5cx^{4+n} = x^2 + 2x^4 - 5x^5$$

  Esta igualdad conduce al sistema:

  $$\left.\begin{aligned} cx^{1+n} &= x^2 \\ 2cx^{3+n} &= 2x^4 \\ -5cx^{4+n} &= 5x^5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow n = 1,\ c = 1, \text{ el monomio es } x$$

10.2. Dado que los números reales $a \in \mathbb{R}$, se pueden considerar como monomios de grado cero, es decir,

$$a = a + 0 \cdot x + 0x^2 + \cdots$$

entonces se puede definir el *producto de un polinomio por un número real* del modo siguiente:

$$(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n)a = a_0a + a_1ax + \cdots + a_nax^n$$

El producto de $f = -2x^2 + 3x^5 + 4x^5$,

por 3 es $3f = -6x^2 + 9x^5 + 12x^6$.

10.3. Sean ahora f y g dos polinomios

$$f = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \quad \text{y}$$

$$g = b_0 + b_1x + bx^2 + \cdots + b_px^p,$$

se define el *producto de* f y g, y se escribe $f \cdot g$ o fg, *al polinomio suma de los polinomios que resultan al multiplicar f por los monomios del polinomio g*, es decir.

$$fg = f(b_0) + f(b_1x) + f(b_2x^2) + \cdots + f(b_px^p)$$

21. Halla $f \cdot g$

$$f = 2x^2 + 3x - 5$$
$$g = 2x$$

22. Halla $h \cdot j$

$$h = 3x^5 - 6x^4 + 2x^2$$
$$j = 3x^3$$

Ejemplo:

- Sea $f = x - 3x^2 + 4x^3$ y $g = x + 2x^2 - 3x^4$, vamos a calcular fg:

$$fg = (x - 3x^2 + 4x^3)x + (x - 3x^2 + 4x^3)(2x^2) + \\ + (x - 3x^2 + 4x^3)(-3x^4) = (x^2 - 3x^3 + 4x^4) + \\ + (2x^3 - 6x^4 + 8x^5) + (-3x^5 + 9x^6 - 12x^7) = \\ = x^2 - x^3 - 2x^4 + 5x^5 + 9x^6 - 12x^7$$

En la práctica se adopta la siguiente disposición:

$f \ldots$	$x - 3x^2 + 4x^3$
$g \ldots$	$x + 2x^2 - 3x^4$
$xf \ \ldots$	$x^2 - 3x^3 + 4x^4$
$2x^2 f \ldots$	$+ 2x^3 - 6x^4 + 8x^5$
$-3x^4 f \ldots$	$- 3x^5 + 9x^6 - 12x^7$
$fg \ldots$	$x^2 - x^3 - 2x^4 + 5x^5 + 9x^6 - 12x^7$

23. Sea $f = -x + 2x^3 + 5x^6$, $g = x + 7x^2 - x^3$, $h = 3x + 2x^2 - x^3$

Halla:

a) $-gh$ b) f^2 c) $f(gh)$ d) $(fg)h$
e) $f(g + h)$ f) $fg + fh$ g) $f^2(g^2 - h)$

Compara los resultados de c y d, y los de e y f. ¿Qué propiedades de la multiplicación de polinomios quedan comprobadas?

24. El polinomio $(1, 0, 0, \ldots)$ se representa por 1 calcula $f \cdot 1$ siendo

$$f = 2x^2 - 3x^3 + 4x^4$$

25. Calcula los productos de los siguientes monomios:

a) $(0, 0, 2)$, $(0, 0, 0, 0, 0, 3)$
b) $(0, 0, f)$, $(0, 0, 1, 0, 0, \ldots)$

26. Si $\partial f = 5$. ¿Cuál es $\partial(5x^2 \cdot f)$?

27. Sea $f = x + 1$, $g = x - 1$. Calcula:

f^2; g^2; $f \cdot g$, $f^3 = g^2 \cdot f$; $g^3 = g^2 \cdot g$

11 Propiedades de la multiplicación de polinomios

La multiplicación de polinomios tiene las propiedades:

11.1. *Asociativa.*

$\forall f, g, h \in \mathbb{R}[x]$, se verifica: $f \cdot (g \cdot h) = (f \cdot g) \cdot h$

11.2. *Conmutativa.*

Sean f y g dos polinomios cualesquiera $f, g \in \mathbb{R}[x]$, se verifica: $f \cdot g = g \cdot f$

11.3. *Existe elemento neutro,* que es el polinomio $1 = (1, 0, 0, \ldots)$

$f \cdot 1 = f$ ya que $1 \cdot a_i = a_i$

11.4. *La multiplicación es distributiva respecto de la adición*

$$f \cdot (g + h) = f \cdot g + f \cdot h$$

11.5. El grado del producto de dos polinomios es igual a la suma de los grados de los factores. $\partial(fg) = \partial f + \partial g$

11.6. Si $f \cdot g = \mathbf{0}$, entonces $f = \mathbf{0}$ o $g = \mathbf{0}$; en efecto, supongamos que $fg = \mathbf{0}$, con $f \neq \mathbf{0}$ y $g \neq \mathbf{0}$, entonces $\partial(fg) = \partial f + \partial g$, contradicción con el hecho de que $fg = \mathbf{0}$ ya que el polinomio $\mathbf{0}$ no tiene grado.

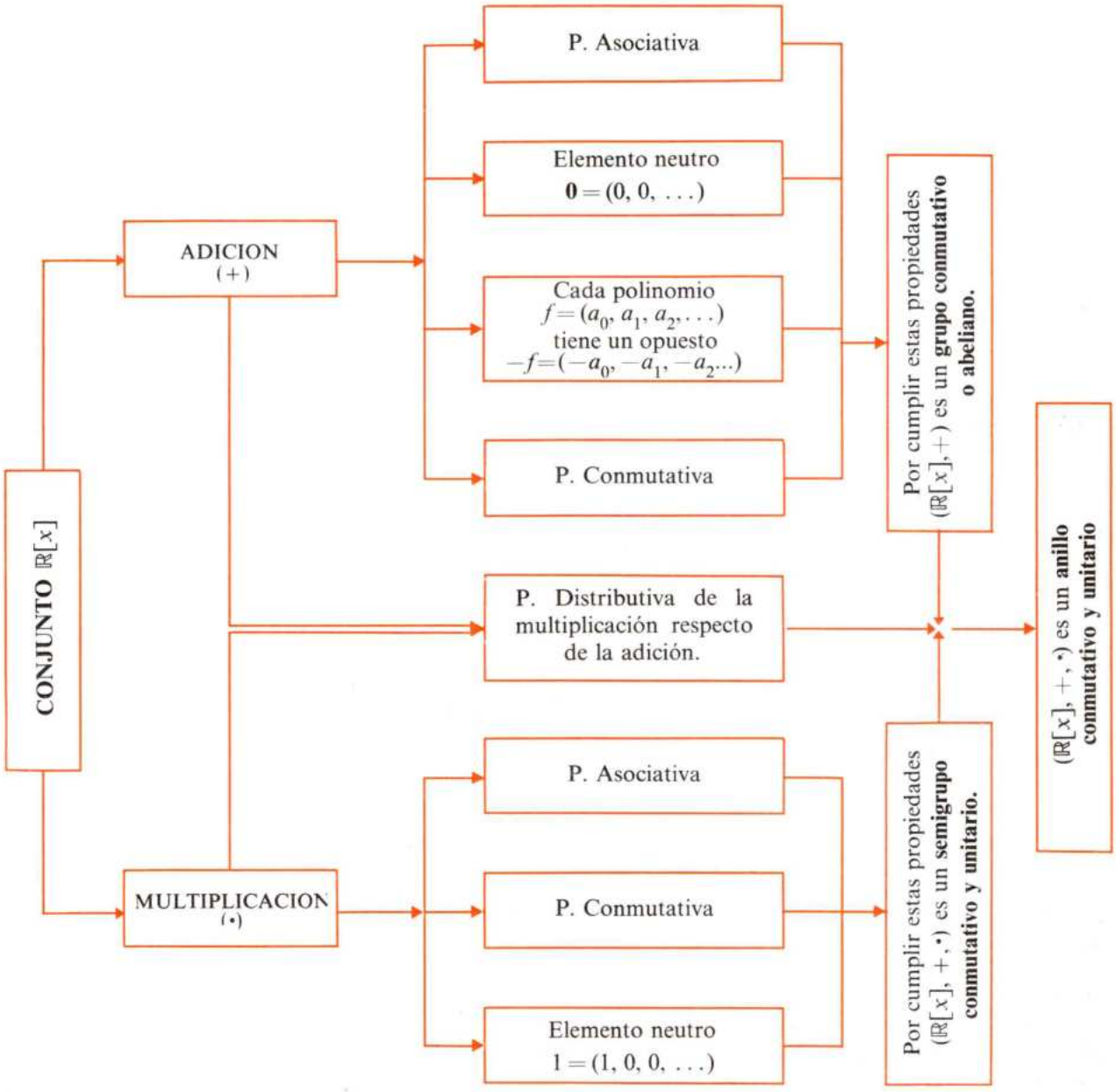
28. Comprueba la propiedad **11.2.** con los polinomios

$f = 2x^2 + x - 1$
$g = x^2 - 2x + 3$

12 El anillo de los polinomios con coeficientes reales

12.1. Reunimos en un cuadro los resultados anteriores.

$(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ es un anillo conmutativo y unitario que se llama el *anillo de los polinomios con coeficientes reales.*



12.2. Para averiguar si $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ es un cuerpo, tendríamos que ver si todo polinomio $f \neq \mathbf{0}$ tiene inverso.

Sea f un polinomio de grado mayor que 1, entonces si tuviera inverso, existiría un $g \in \mathbb{R}[x]$ tal que $fg = 1$ de donde $\partial(f+g) = 0$, y como $\partial f > 1$, no puede existir tal g, luego $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ *no* es un cuerpo.

13 El binomio de Newton

Vamos a estudiar las sucesivas potencias del binomio $x + a$.

$(x + a)^1 = x + a$

$(x + a)^2 = (x + a)(x + a) = x^2 + 2ax + a^2$

$(x + a)^3 = (x + a)^2(x + a) = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$

Las igualdades anteriores se pueden escribir con ayuda de los números combinatorios del modo siguiente:

$$(x + a)^1 = x + a = \binom{1}{0}x + \binom{1}{1}a$$

$$(x + a)^2 = x^2 + 2xa + a^2 = \binom{2}{0}x^2 + \binom{2}{1}xa + \binom{2}{2}a^2$$

$$(x + a)^3 = x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3 = \binom{3}{0}x^3 + \binom{3}{1}x^2a + \\ + \binom{3}{2}xa^2 + \binom{3}{3}a^3$$

Si observamos los coeficientes de estos desarrollos vemos que son los *coeficientes del triángulo de Pascal;* parece entonces lógico ver si la ley viene dada por:

$$(x+a)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}a + \cdots + \binom{n}{n-1}xa^{n-1} + \binom{n}{n}a^n$$

Para ello calculemos la siguiente potencia:

$$(x + a)^{n+1} = (x + a)^n(x + a) =$$

$$= \left[\binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}a + \cdots + \binom{n}{n-1}^{n-1}xa^{n-1}\binom{n}{n}a^n\right](x + a) =$$

$$= \left[\binom{n}{0}x^{n+1} + \binom{n}{1}x^na + \binom{n}{2}x^{n-1}a^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}x^2a^{n-1} + \right.$$

$$\left. + \binom{n}{n}xa^n\right] + \left[\binom{n}{0}x^na + \binom{n}{1}x^{n-1}a^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}xa^n + \right.$$

$$\left. + \binom{n}{n}a^{n+1}\right] = \binom{n}{0}x^{n+1} + \left[\binom{n}{1} + \binom{n}{0}\right]x^na +$$

$$+ \left[\binom{n}{2} + \binom{n}{1}\right]x^{n-1}a^2 + \cdots + \left[\binom{n}{n} + \binom{n}{n-1}\right]xa^n + \binom{n}{n}a^{n+1}$$

29. Calcula:

(a) $(x^2 - 1)^2$

(b) $(x^2 - 1)^3$

(c) $(x^3 - 1)^2$

(d) $(x^5 + 8)^4$

(e) $(7x + 2)^5$

(f) $(x^2 - 1)^6$

30. Observando que el término 4 de $(x + a)^n$ es $\binom{n}{3}x^{n-3}\,a^3$ y el término 5 es $\binom{n}{4}x^{n-4}\,a^4$

Escribe los términos 6º, 13º y 20º.

31. El término que ocupa el lugar $k + 1$ en el desarrollo de $(x + a)^n$ es $\binom{n}{k}x^{n-k}a^k$ escribe

Escribe el término que ocupa el lugar k.

32. El desarrollo de $(2x + a)^{16}$ tiene diecisiete términos, ocho de ellos son anteriores a $\binom{16}{8}$ y otros ocho le siguen, por eso el término central de $(2x + a)^{16}$ es $\binom{16}{8}(2x)^8a^8$.

Calcula el término central de $(x + a)^{22}$.

Teniendo en cuenta que: $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$, se tiene:

$$(x+a)^{n+1} = \binom{n+1}{0}x^{n+1} + \binom{n+1}{1}x^n a + \binom{n+1}{2}x^{n-1}a^2 + \cdots + \binom{n+1}{n}xa^n + \binom{n+1}{n+1}a^{n+1}$$

que es de la forma indicada.

El desarrollo de $(x+a)^n$ será:

$$(x+a)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}xa^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n-1}xa^{n-1} + \binom{n}{n}a^n$$

y se llama el binomio de Newton. (Ver complementos.)

Ejemplo:

- $(x+a)^5 = \binom{5}{0}x^5 + \binom{5}{1}x^4 a + \binom{5}{2}x^3a^2 +$

  $+ \binom{5}{3}x^2a^3 + \binom{5}{4}xa^4 + \binom{5}{5}a^5 =$

  $= x^5 + 5x^4a + 10x^3a^2 + 10x^2a^3 + 5xa^4 + a^5$

El desarrollo de $(x-a)^n$ es:

$$(x-a)^n = (x+(-a))^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}(-a) +$$

$$+\binom{n}{2}x^{n-2}(-a)^2 + \binom{n}{3}x^{n-3}(-a)^3 + \cdots + \binom{n}{n}(-a)^n =$$

$$= \binom{n}{0}x^n - \binom{n}{1}x^{n-1}a + \binom{n}{2}x^{n-2}a^2 - \binom{n}{3}x^{n-3}a^3 + \cdots$$

$$\pm\binom{n}{n}a^n$$

Ejemplos:

- $(x^2-2)^3 = \binom{3}{0}(x^2)^3 - \binom{3}{1}(x^2)^2\cdot 2 + \binom{3}{2}x^2\cdot 2^2 - \binom{3}{3}\cdot 2^3 =$

  $= x^6 - 6x^4 + 12x^2 - 8$

  $(x-2)^6 = \binom{6}{0}x^6 - \binom{6}{1}x^5\cdot 2 + \binom{6}{2}x^4\cdot 2^2 -$

  $- \binom{6}{3}x^3\cdot 2^3 + \binom{6}{4}x^2\cdot 2^4 - \binom{6}{5}x\cdot 2^5 + \binom{6}{6}\cdot 2^6 =$

  $= x^6 - 6\cdot x^5\cdot 2 + 15x^4\cdot 4 - 20x^3\cdot 8 + 15x^2\cdot 16 -$
  $-6x\cdot 32 + 64 = x^6 - 12x^5 + 60x^4 - 160x^3 +$
  $+ 240x^2 - 192x + 64.$

33. Calcula:

a) $(x-1)^2$
b) $(x-3)^3$
c) $(x-2)^4$
d) $(x-2)^5$
e) $(x^2-1)^6$

34. ¿Qué signo tendrá el término de coeficiente $\binom{20}{5}$ en el desarrollo $(x-a)^{20}$?

35. Escribe el término central del desarrollo de $(x-1)^{10}$.

36. ¿Cuál es el mayor coeficiente de $(x-1)^{18}$?

37. Observa cómo se calcula $(a+b-c)^2$

$(a+b-c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc$.

Calcula $(a+b-c+d)^2$ y enuncia una regla para calcular el cuadrado de un polinomio.

38. Calcula $(x^3 - x^2 + x - 1)^2$

Ejercicios y cuestiones

39. De las siguientes potencias, ¿cuáles tienen término central en su desarrollo? $(x + a)^6$, $(2x - 1)^5$, $(x + 2)^{12}$. ¿Por qué?

40. Sin efectuar el desarrollo indica el número de términos que tiene

$$(a + b)^{12}, \quad (3 + 2x)^{30}, \quad (1 + x)^{15}.$$

41. ¿Pueden dos polinomios de distinto grado ser iguales?

42. Escribe los polinomios f y g sin utilizar la indeterminada

$$f = x + x^2 - 2x - x^4 \qquad g = 3 + 2x^2 + x^3$$

y calcula después

a) $f + g$ b) $f - g$ c) $f + 2g$ d) $f - 2g$

43. Escribe el polinomio $(3, 0, 1, -2, 0, 4, 0, 0, \ldots)$ como suma de monomios.

44. Calcula:

a) $(x^3 - 1)^2$; b) $(x^5 + 8)^4$; c) $(7x + 2)^6$; d) $(x^2 + 1)^3$.

45. Halla el grado, coeficiente principal, término de cuarto grado y término independiente de los siguientes polinomios:

$f = -x + 3x^2 - 5x^5$
$g = 2x^4$
$h = 3x^4 - 2x^5 + 6$

46. Halla las formas canónicas de los polinomios:

$f = -1 \quad 6x^3 - 5x^5$
$g = x + 7x^2 - 6x^4 + 5 - 3x^3$

47. Determina un polinomio h tal que $2h + f - g = 3x + 1$. Donde $f = x^2 + 2x - 6$ y $g = x^3 - 3x + 2$.

48. Sea el binomio $6x - 5x^3$. Calcular la expresión $(6x - 5x^3)^4$, primero multiplicando polinomios y después utilizando el binomio de Newton.

49. Sea $f = 1/2 - 3x + 5x^3$, $g = x + 8x^2$. Halla la expresión: $(f + g)(f - h)$.

50. Escribe el término de lugar 88 en el desarrollo de $(x - 1)^{100}$

51. ¿Cuántos términos tiene el producto $(x - a)5\ (x - b)^8$?

Tema 11 DIVISIBILIDAD EN EL ANILLO DE LOS POLINOMIOS $\mathbb{R}[x]$

El objeto de este tema es desarrollar en el anillo de polinomios con coeficientes reales $\mathbb{R}[x]$ *la teoría de la divisibilidad.*

Se inicia el tema con la relación de divisibilidad en el anillo $\mathbb{Z}$ *de los números enteros; a continuación, y de forma análoga, se estudia esta misma relación en el anillo* $\mathbb{R}[x]$.

Tres puntos son fundamentales en el estudio de este tema:

Las relaciones de divisibilidad en $\mathbb{Z}$ *y* $\mathbb{R}[x]$.

El algoritmo de la división y la regla de Ruffini.

El teorema de la factorización en $\mathbb{R}[x]$.

1 La relación de divisibilidad en $\mathbb{Z}$

Sean a y b dos enteros.

Se dice que a *divide* a b, y se escribe $a \mid b$, si existe un entero c tal que $b = ac$.

Se dice también que b es un múltiplo de a, y se escribe $b = \dot{a}$, o que a es un factor de b.

Ejemplo:

- Como $56 = (-7)(-8)$ se deduce que $-7 \mid 56$.

2 Propiedades de la relación $\mid$ en $\mathbb{Z}$

La relación $\mid$ tiene las siguientes propiedades:

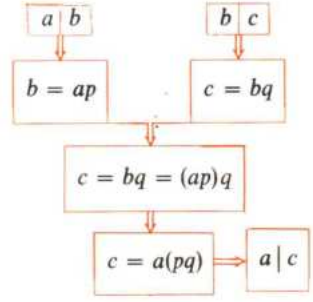
2.1. *Reflexiva.*

$\forall a \in \mathbb{Z}$ se verifica $a \mid a$, ya que existe $1 \in \mathbb{Z}$, tal que $a = a \cdot 1$.

2.2. *Transitiva.*

Si $a \mid b$ y $b \mid c$ entonces $a \mid c$.

Obsérvese el esquema de la demostración de esta propiedad.



2.3. Si $a \mid b$ entonces, para todo entero $m \in \mathbb{Z}$ se verifica $a \mid bm$.

En efecto: si $a \mid b$ entonces existe un entero p tal que $b = ap$. Multiplicando los dos miembros de la igualdad por m resulta:

$$bm = (ap)m = a(pm) \; ; \text{ luego } \; a \mid bm$$

2.4. Si $a \mid b$ y $a \mid c$ entonces $a \mid (b + c)$.

En efecto:

Si $a \mid b \Rightarrow \exists\, p \in \mathbb{Z}$ tal que $b = ap$.
Si $a \mid c \Rightarrow \exists\, q \in \mathbb{Z}$ tal que $c = aq$.

Sumando igualdades resulta:

$$b + c = ap + aq; \quad b + c = a(p + q)$$

esta última igualdad muestra que $a \mid (b + c)$.

2.5. Si $a \mid b$ y $h \in \mathbb{Z}$ se verifica $ah \mid bh$.

2.6. Si $a \mid b$ y $c \mid h$ entonces $ac \mid bh$.
Obsérvese el esquema de esta propiedad.

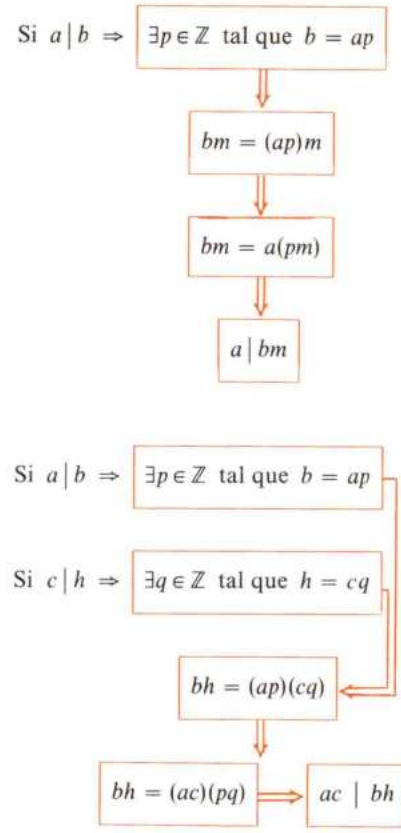
Nota: Puede ocurrir que dado dos enteros a y b se verifique $a \mid b$ y $b \mid a$, y sean $a \neq b$.

Ejemplo:

- $4 \mid -4$ y $-4 \mid 4$ y es $4 \neq 4$

Luego la relación $\mid$ en el anillo de los enteros *no es antisimétrica. Dos enteros* a y b, *tales que* $a \mid b$, y $b \mid a$, y $a \neq b$, *se llaman asociados*, así: 3 y -3 son asociados, pues

$$3 \mid -3, \quad -3 \mid 3 \quad \text{y} \quad 3 \neq -3$$



1. Demuestra la propiedad **2.5.**

3 La relación de divisibilidad en $\mathbb{R}[x]$

3.1. Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos polinomios, se dice que $f(x)$ *divide a* $g(x)$, y se escribe $f(x) \mid g(x)$, si existe un polinomio $h(x)$ tal que $h(x)f(x) = g(x)$. Se dice también que $g(x)$ *es un múltiplo de* $f(x)$ o que $f(x)$ es un factor de $g(x)$.

Ejemplos:

- Dado que $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$ se sigue que $(x - 1) \mid (x^3 - 1)$, y también que $(x^2 + x + 1) \mid (x^3 - 1)$.
- Consideremos el polinomio $2x^5 - 3x^3$, como

$$2x^5 - 3x^3 = 2x^3\left(x^2 - \frac{3}{2}\right)$$

se deduce que $2x^3 \mid (2x^5 - 3x^3)$
y también que $(x^2 - \frac{3}{2}) \mid (2x^5 - 3x^3)$

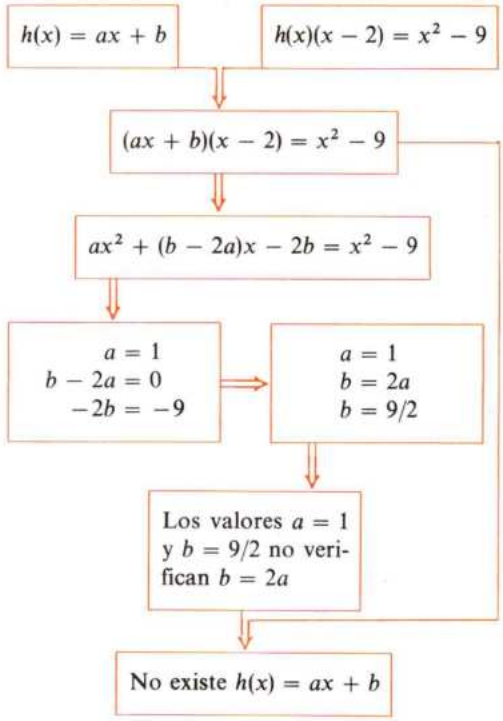
2. Prueba que si $a \mid b$ y $b \mid a$, siendo a y b números naturales, se verifica $a = b$, es decir, en $\mathbb{N}$ la relación de divisibilidad es una relación de orden.

3. Como $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$.
¿Qué relaciones de divisibilidad se pueden escribir?

3.2. Tratemos de ver si el polinomio $(x - 2)$ divide a $x^2 - 9$. Si $(x - 2)$ divide a $x^2 - 9$, debe existir un polinomio $h(x)$ tal que $h(x) \cdot (x - 2) = x^2 - 9$; como el grado de un producto de polinomios es la suma de los grados de los factores se debe tener: *grado de* $h(x) + 1 = 2$, *es decir* $\partial(h(x)) + 1 = 2$, *de donde si* $h(x)$ *existe, debe ser de grado* 1.

Al margen se prueba que no existe tal polinomio de primer grado, $h(x) = ax + b$, que verifique la condición

$$h(x)(x - 2) = x^2 - 9.$$



4 Propiedades de la relación | en $\mathbb{R}[x]$

La relación | tiene las siguientes propiedades:

4.1. *Reflexiva.* $\forall f(x) \in \mathbb{R}[x]$ se verifica: $f(x) \mid f(x)$
ya que $f(x) = 1 \cdot f(x)$ y $1 \in \mathbb{R}[x]$

4.2. *Transitiva.* Si $f(x) \mid g(x)$ y $g(x) \mid h(x)$ entonces $f(x) \mid h(x)$.

En efecto:

Si $f(x) \mid g(x)$, entonces existe un polinomio $a(x)$ tal que

$$g(x) = f(x)\ a(x)\ [1]$$

Si $g(x) \mid h(x)$ existe un polinomio $b(x)$ tal que

$$h(x) = g(x)\ b(x)\ [1]$$

Sustituyendo $g(x)$ por su valor en [1]

$$h(x) = [f(x)\ a(x)]b(x) = f(x)[a(x)b(x)],$$

luego $f(x) \mid h(x)$.

Obsérvese que se han utilizado las propiedades conmutativa y asociativa del producto.

4. De las siguientes relaciones, indica cuáles son ciertas y cuáles falsas:

a) $(x^2 - 1) \mid (x^4 - 1)$

b) $(x - 1) \mid (x^2 + 1)$

c) $2 \mid x^2 - 3x + 4$

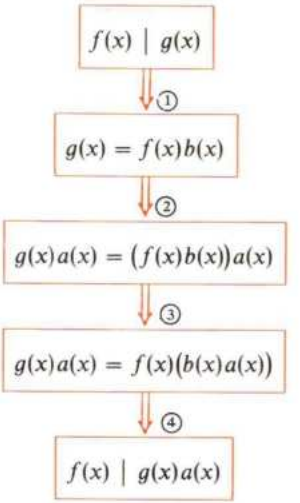
d) $x \mid (x^2 - 1)$

4.3. Si $f(x) \mid g(x)$, entonces, para todo polinomio $a(x)$ se verifica: $f(x) \mid g(x)\ a(x)$.

Si $f(x) \mid g(x)$, entonces, existe un polinomio $b(x)$ tal que

$$g(x) = f(x)b(x)$$

En el esquema de la demostración se observa que en ① y ④ se ha utilizado la definición de la relación $\mid$. En ② se han multiplicado los dos miembros de la igualdad por $a(x)$. Finalmente en ③ se ha utilizado la propiedad asociativa.



4.4. Si $f(x) \mid a(x)$ y $f(x) \mid b(x)$, entonces, $f(x) \mid [a(x) + b(x)]$. En efecto:

Si $f(x) \mid a(x) \Rightarrow \exists\, h(x) \in \mathbb{R}[x]$ tal que $a(x) = f(x)\,h(x)$

Si $f(x) \mid b(x) \Rightarrow \exists\, g(x) \in \mathbb{R}[x]$ tal que $b(x) = f(x)g(x)$

$$a(x) + b(x) = f(x)[h(x) + g(x)] \Rightarrow f(x) \mid [a(x) + b(x)]$$

4.5. Si $f(x) \mid a(x)$ y $h(x) \mid b(x)$ entonces $(f(x)h(x)) \mid (a(x)b(x))$

La demostración es análoga a las anteriores.

Si $f(x) \mid a(x)$, entonces, existe un $c_1(x)$ tal que

$$f(x)c_1(x) = a(x) \quad \text{y si, } h(x) \mid b(x)$$

existe un polinomio $c_2(x)$ tal que $h(x)c_2(x) = b(x)$; multiplicando las dós igualdades anteriores resulta:

$$(f(x)c_1(x))(h(x)c_2(x)) = a(x)b(x) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (f(x)h(x))(c_1(x)c_2(x)) = a(x)b(x) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(x)h(x) \mid (a(x)\,b(x))$$

Obsérvese que se han utilizado las propiedades conmutativa y asociativa del producto de polinomios.

4.6. Si $f(x)$ es un polinomio y $a \in \mathbb{R}\ a \neq 0$, entonces $a \mid f(x)$

$$\text{ya que} \quad f(x) = a\,\frac{f(x)}{a}$$

4.7. Si $f(x) \mid g(x)$ y $a \in \mathbb{R}\ \ a \neq 0$, entonces $af(x) \mid g(x)$.

Nota: Puede suceder que dados dos polinomios $f(x)$ y $g(x)$, se tenga $f(x) \mid g(x)$ y $g(x) \mid f(x)$, y los polinomios sean distintos.

Ejemplo:

- $f(x) = 3x - 3$, $g(x) = x - 1$, entonces $3x - 3 = 3(x - 1) \Rightarrow$ $\Rightarrow (x - 1) \mid (3x - 3)$

$$x - 1 = \frac{1}{3}(3x - 3) \Rightarrow (3x - 3) \mid x - 1$$

Luego la relación $\mid$ *no* es de orden en el anillo $\mathbb{R}[x]$, pues no es antisimétrica.

Dos polinomios $f(x)$ y $g(x)$, como los anteriores, para los cuales se verifica que $f(x) \mid g(x)$ y $g(x) \mid f(x)$ se llaman asociados.

5. Prueba que los polinomios $x - 1/4$ y $4x - 1$ son asociados.

6. Demuestra la propiedad **4.7.**

7. Dados los polinomios

$f(x) = 3x - 6 \quad ; \quad a(x) = x^2 - 1$

$g(x) = x - 1 \quad ; \quad b(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$

$h(x) = 2x - 2$

indica cuáles son asociados.

8. Demuestra que todo polinomio es asociado de sí mismo.

9. Demuestra que dos polinomios asociados con un tercero son asociados entre sí.

5 División con resto

5.1. Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos polinomios tales que $f(x) \neq 0$ y $g(x) \neq 0$. Se demuestra, que existen dos polinomios únicos $c(x)$ y $r(x)$ tales que $f(x) = g(x) \cdot c(x) + r(x)$ con $\partial(r(x)) = 0$ o $\partial(r(x)) < \partial(g(x))$

A $f(x)$ y $g(x)$ se llama respectivamente dividendo y divisor; $c(x)$ se llama cociente y $r(x)$ resto.

Si $r(x) = 0$, entonces, la división se llama exacta y en este caso

$$g(x) \mid f(x)$$

Si $f(x) = 3x^3 - 6x^2 + 6x - 8$ y $g(x) = 2x^2 + 4$, el cociente $c(x)$ se obtiene con el algoritmo que ya es conocido.

$$\begin{array}{rl|l} 3x^3 - 6x^2 + 6x - 8 & & 2x^2 + 4 \\ -3x^3 \qquad\quad - 6x & & \frac{3}{2}x - 3 \\ \hline -6x^2 \quad - 8 & & \\ +6x^2 + 12 & & \\ \hline +\ 4 & & \end{array}$$

$$r(x) = 4; \quad c(x) = \frac{3}{2}x - 3$$

10. Haz las siguientes divisiones:

a) $x^2 + 2x - 3 : x^2 + 4$

b) $3x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 6x : x^2 + 8$

c) $4x^5 - 6x^3 + 2x^2 - 7x + 1 : 3x - 1$

d) $x^8 - 1 : x - 1$

e) $x^7 - 1 : x^2 + 2x - 3$

f) $x^4 + 3x^2 - 1 : x^4 + 5$

g) $x^3 - 6x + 8 : x^7 - 1$

h) $6x^6 + 4x^5 + 3x^3 - 2 : x^3 + 6$

6 Regla de Ruffini

6.1. Sea

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

un polinomio y $a \in \mathbb{R}$; nos proponemos estudiar la división de $f(x)$ por el binomio $x - a$.

Queremos encontrar un polinomio $c(x)$ de grado $n - 1$

$$c(x) = c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + \cdots + c_1x + c_0$$

y un número r tal que

$$f(x) = c(x) \cdot (x - a) + r \quad [1]$$

Para encontrar $c(x)$ y r utilicemos la igualdad [1].

$$\begin{array}{l} c(x) \longrightarrow c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + \cdots + c_2x^2 + c_1x + c_0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x - a \\ \hline c(x)\cdot x \longrightarrow c_{n-1}x^n + c_{n-2}x^{n-1} + \cdots + c_2x^3 + c_1x^2 + c_0x \\ -c(x)\cdot a \longrightarrow \qquad -ac_{n-1}x^{n-1} - \cdots - ac_3x^3 - ac_2x^2 - ac_1x - ac_0 \\ \hline c(x)(x-a) = c_{n-1}x^n + (c_{n-2} - ac_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (c_2 - ac_3)x^3 + (c_1 - ac_2)x^2 + (c_0 - ac_1)x - ac_0 \end{array}$$

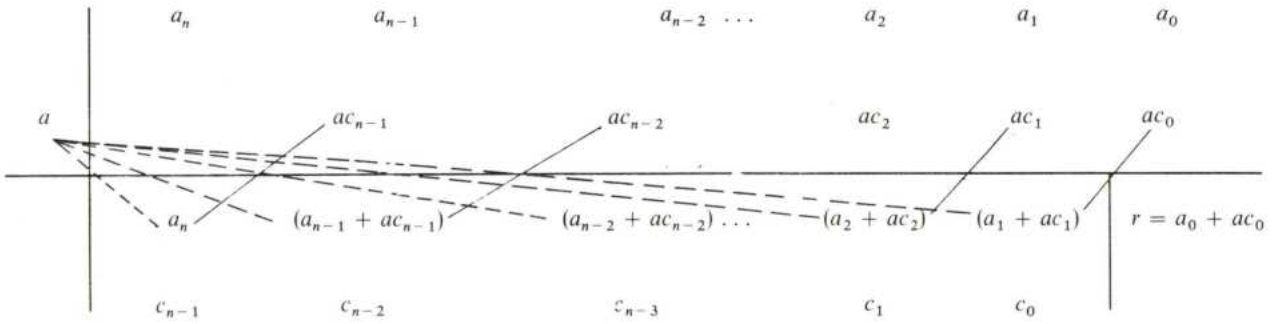
El segundo miembro de [1] se puede escribir

$$c_{n-1}x^n + (c_{n-2} - ac_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (c_2 - ac_3)x^3 + \\ +(c_1 - ac_2)x^2 + (c_0 - ac_1)x - ac_0 + r$$

Aplicando la definición de igualdad de polinomios en [1] resulta:

$$\begin{array}{ll} c_{n-1} = a_n & c_{n-1} = a_n \\ c_{n-2} - ac_{n-1} = a_{n-1} & c_{n-2} = a_{n-1} + ac_{n-1} \\ c_{n-3} - ac_{n-2} = a_{n-2} & c_{n-3} = a_{n-2} + ac_{n-2} \\ \vdots & \vdots \\ c_1 - ac_2 = a_2 & c_1 = a_2 + ac_2 \\ c_0 - ac_1 = a_1 & c_0 = a_1 + ac_1 \\ -ac_0 + r = a_0 & r = a_0 + ac_0 \end{array}$$

Estas igualdades, que nos permiten calcular los coeficientes del polinomio cociente y el resto r, se recuerdan fácilmente si se disponen los datos del modo que se indica a continuación.



Ejemplo:

- Vamos a dividir $x^6 - 7x^4 + 2x^2 - 3x + 1$ por $x - 2$

	1	0	−7	0	2	−3	1
2		2	4	−6	−12	−20	−46
	1	2	−3	−6	−10	−23	−45

$c(x) = x^5 + 2x^4 - 3x^3 - 6x^2 - 10x - 23$
$r(x) = -45$

Nota: Obsérvese que en la tabla deben aparecer todos los coeficientes en orden decreciente de forma que si algún coeficiente no aparece en el polinomio, en la tabla debe ponerse 0.

Esta regla, para hacer la división por $x - a$ se llama la *regla de Ruffini.*

Al margen aparecen las divisiones

$x^5 - 3x + 1 \mid x + 2$ y $x^5 - 1 \mid x + 1$

$x^5 - 3x + 1 \mid x + 2$

	1	0	0	0	−3	1
−2		−2	4	−8	16	−26
	1	−2	4	−8	13	$r = -25$

$c(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 13$
$r(x) = -25$

$x^5 - 1 \mid x + 1$

	1	0	0	0	0	−1
−1		−1	1	−1	1	−1
	1	−1	1	−1	1	$r = -2$

$c(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$
$r = -2$

6.2. Estudiemos ahora la división de un polinomio $f(x)$ por el binomio $ax - b$.

Como

$$ax - b = a\left(x - \frac{b}{a}\right)$$

resulta que si

$$f(x) = c(x) \cdot (ax - b) + r$$

dividiendo por $a \neq 0$

$$\frac{1}{a} f(x) = c(x) \cdot \left(x - \frac{b}{a}\right) + \frac{1}{a} \cdot r.$$

Esta última igualdad nos dice que *para dividir $f(x)$ por $ax - b$ se dividen los coeficientes de $f(x)$ por a; se aplica la regla de Ruffini para el divisor $x - b/a$, el cociente así obtenido es el de la división por $ax - b$, y el resto de la división propuesta se obtiene multiplicando el resto obtenido por a.*

Así para dividir $3x^3 - 6x + 5$ entre $2x - 1$, dividimos todos los coeficientes del dividendo por 2.

$$\frac{3}{2}x^3 - 3x + \frac{5}{2}$$

ahora aplicamos la regla de Ruffini para el binomio $x - \frac{1}{2}$

	$\frac{3}{2}$	0	-3	$\frac{5}{2}$
$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{-21}{16}$
	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{-21}{8}$	$\frac{19}{16}$

Entonces

$$c(x) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{21}{8}$$

$$r = \frac{19}{16} \cdot 2 = \frac{19}{8}$$

11. Halla el cociente y el resto de la división del polinomio:

$$3x^5 - 5x^4 + 2x - 1 \quad \text{por} \quad x + 2$$

12. Halla el cociente y el resto de la división:

$$3x^7 - 2x^2 + 6 \quad \text{por} \quad x - 2$$

13. Haz las siguientes divisiones:

$$x^6 - 13x^2 + 4 : x + 1$$
$$x^4 - 2x^3 - x : x + 2$$

14. Mediante la regla de Ruffini halla el cociente y el resto de las divisiones

$$x^6 - 13x^2 + 4 : 2x - 3$$
$$x^6 - 13x^2 + 4 : 3x + 1$$

15. Sabiendo que la división

$$x^6 - ax^4 + 3x^2 - 5x + 1 : x - 1$$

es exacta, halla a.

16. Divide $x^6 - 3x^4 + x^2 - 1$ por $x^2 + 4$ (*Indicación:* Se hace $x^2 = y$, y después se aplica la regla de Ruffini).

7 Valor numérico de un polinomio

7.1. Sea $f(x)$ un polinomio con coeficientes reales,

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$$

y sea $b \in \mathbb{R}$, *se define el valor numérico de $f(x)$ en b, y se escribe $f(b)$, al número real definido por:*

$$f(b) = a_n b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \cdots + a_0$$

Ejemplos:

- Sea $f(x) = x^2 - x + 1$ y $b = \sqrt{3}$, entonces
$$f(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^2 - \sqrt{3} + 1 = 4 - \sqrt{3}$$
- Sea $f(x) = x^3 + 16x^2 + 32x + 8$ y $b = -2$ entonces
$$f(-2) = (-2)^3 + 16(-2)^2 + 32(-2) + 8 = 0$$

7.2. Sea $f(x)$ un polinomio; *un número real b se dice que es una raíz de $f(x)$ si el valor numérico de $f(x)$, para $x = b$, es cero; es decir, si $f(b) = 0$.* También se dice que b es un cero del polinomio $f(x)$.

Ejemplos:

- Sea $f(x) = 3x^3 - 2x + 1$ y $b = 3$ entonces 3 no es raíz de $f(x)$ ya que $f(3) = 3(3)^3 - 2(3) + 1 = 76 \neq 0$.
- Sea $f(x) = x^2 - 6x + 8$, entonces 4 es raíz de $f(x)$, ya que $f(4) = 4^2 - 6 \cdot 4 + 8 = 0$.

7.3. El siguiente resultado da un método, a veces útil, para hallar raíces de un polinomio.

Teorema:

Si $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

es un polinomio cuyos coeficientes son todos enteros, entonces si b es una raíz entera de $f(x)$, b debe dividir al término independiente.

En efecto, si b es raíz de $f(x)$ será:

$$f(b) = 0 = a_n b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \cdots + a_1 b + a_0$$

se deduce

$$a_0 = -b(a_n b^{n-1} + a_{n-1}b^{n-2} + \cdots + a_1) \Rightarrow b/a_0$$

Ejemplo:

- Sea $f(x) = 3x^3 - 3x^2 - 17x + 2$, entonces las raíces enteras de $f(x)$ deben estar en el conjunto $\{-2, -1, 1, 2\}$ de divisores del término independiente 2; como
$f(-2) = 0$; $f(-1) = 13$; $f(1) = -15$ y $f(2) = -20$,
resulta que la única raíz entera de $f(x)$ es -2; sin embargo, $f(x)$ puede tener otras raíces en $\mathbb{Q}$ o en $\mathbb{R}$.

17. Halla el valor numérico del polinomio
$$f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 6x + 1$$
para
$$x = 0, \quad x = 1 \quad \text{y} \quad x = -1$$

18. ¿Es 3 una raíz del polinomio
$$x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 3x^2?$$

19. Halla las raíces del polinomio
$$x^4 - 5x^2 + 4?$$

20. Halla las raíces enteras del polinomio
$$x^4 - 6x^3 + 7x^2 + 6x - 8$$

21. Calcula las raíces del polinomio
$$x^4 + 3x^3 + x^2 - 3x - 2$$

8 Resto de la división de un polinomio por x - a

8.1. Sea $f(x)$ un polinomio; realizando la división por el binomio $x - a$, se tiene:

$$f(x) = (x - a)\, c(x) + r(x) \quad [1]$$

donde

$r(x) = 0$, ó $\partial(r(x)) < 1$ es decir, $r(x) = 0$ ó $\partial(r(x)) = 0$

esto indica que $r(x)$ es cero o una constante $R \neq 0$.

Haciendo $x = a$ en [1] resulta:

$$f(a) = (a - a) \cdot c(a) + r(a)$$

esta igualdad nos dice que:

$$f(a) = r(a) = R$$

El resto de la división de un polinomio por $x - a$ es el valor numérico del polinomio para $x = a$. Este teorema se conoce con el nombre de «*Teorema del resto*».

Ejemplo:

- Sea $f(x) = 2x^6 - x + 6$ y el binomio $x + 1$ entonces como $x + 1 = x - (-1)$, el resto de la división de $f(x)$ por $x + 1$ será $f(-1) = 2(-1)^6 - (-1) + 6 = 9$.

Consecuencia: si $f(a) = 0$, entonces, el resto de la división $f(x) : x - a$ es cero y $f(x)$ es divisible por $x - a$.

$$f(x) = (x - a)\, c(x) \Leftrightarrow (x - a) \mid f(a) \Leftrightarrow f(a) = R = 0$$

8.2. Sea $f(x) = x^n \pm a^n$; estudiaremos las divisiones

$$x^n \pm a^n : x \pm a$$

Se pueden considerar los cuatro casos siguientes:

$$x^n - a^n : x - a \quad [1]$$
$$x^n - a^n : x + a \quad [2]$$
$$x^n + a^n : x - a \quad [3]$$
$$x^n + a^n : x + a \quad [4]$$

En el caso [1], como el valor numérico del polinomio $f(x)$, para $x = a$, es $f(a) = a^n - a^n = 0 = R$
resulta que a es raíz de $f(x)$ y el resto es cero: $R = 0$, luego $(x - a) \mid (x^n - a^n)$.

El cociente se puede obtener aplicando la regla de Ruffini:

$$c(x) = x^{n-1} + ax^{n-1} + a^2x^{n-3}x + \cdots + a^{n-1}$$

22. Aplicando el teorema del resto, calcula cuál es el resto de las siguientes divisiones:

a) $x^5 - 1 : x + 1$
b) $x^4 - 2x^3 + 6 : x - 2$
c) $x^3 - 3x^2 + 5x + 6 : x - 3$
d) $x^3 - 5x^2 + 3x + 1 : x + 2$
e) $x^3 - 1 : x - 1$
f) $x^3 - 1 : x + 1$
g) $x^4 - 1 : x - 1$
h) $x^4 + 1 : x - 1$
i) $x^4 + 1 : x + 1$

En el caso [2], el valor numérico de $f(x)$, para $x = -a$, es $f(-a) = (-a)^n - a^n$.

Distinguiremos dos subcasos:

a) Si n es par

$$f(-a) = 0 = R \quad \text{y} \quad (x + a) \mid (x^n - a^n)$$

b) Si n es impar, entonces

$f(-a) = -a^n - a^n = -2a^n = R$ y $(x + a)$ no divide a $(x^n - a^n)$

En el caso [3] se comprueba fácilmente que $f(a) = 2a^n = R$, tanto si n es par como si es impar, luego $(x - a)$ no divide a $x^n + a^n$.

Finalmente, en [4], $f(-a) = (-a)^n + a^n$.

También hay que considerar dos subcasos.

a) Si n es par, entonces

$$f(-a) = (-a)^n + a^n = a^n + a^n = 2a^n$$

es decir,

$f(-a) = R = 2a^n \Rightarrow$ para n par, $x + a$ no divide a $(x^n + a^n)$.

b) Si n es impar

$f(-a) = (-a)^n + a^n = -a^n + a^n = 0 = R \Rightarrow$ para n *par* $(x + a) \mid (x^n + a^n)$

23. Calcula el resto de las siguientes divisiones sin hacerlas:

a) $x^3 - 1 : x - 1$
b) $x^3 - 1 : x + 1$
c) $x^3 + 1 : x - 1$
d) $x^3 + 1 : x + 1$
e) $x^4 - 4 : x - 2$
f) $x^4 - 4 : x + 2$
g) $x^4 + 4 : x - 2$
h) $x^4 + 4 : x + 2$
i) $x^5 - 32 : x - 2$
j) $x^5 - 32 : x + 2$
k) $x^5 + 32 : x - 2$
l) $x^5 + 32 : x + 2$
m) $x^5 - 16 : x - 1$
n) $x^5 - 16 : x + 1$
p) $x^4 - 2 : x + 1$

9 Factorización de polinomios

Sea $f(x)$ un polinomio de $\mathbb{R}[x]$ y $a_1 \in \mathbb{R}$. Si a_1 es raíz de $f(x)$, entonces $f(a_1) = 0$, y como el resto de la división de $f(x)$ por $x - a_1$ es precisamente $f(a_1)$, se sigue que $(x - a_1) \mid f(x)$ y, por tanto, existe un polinomio $c_1(x)$ tal que $f(x) = (x - a_1)\, c_1(x)$.

Comparando los grados de los polinomios de esta igualdad se sigue que $c_1(x)$ es de grado una unidad inferior al grado de $f(x)$.

$c_1(x)$ se puede calcular por la regla de Ruffini:

Ejemplo:

- Sea $f(x) = x^3 + 12x^2 + 29x - 12$, como $f(-4) = 0$, se sigue que -4 es raíz de $f(x)$, luego $f(x) = (x + 4)c_1(x)$.

	1	12	29	−12
−4		−4	−32	+12
	1	8	−3	$R = 0$

de donde: $f(x) = (x + 4)(x^2 + 8x - 3)$.

Supongamos ahora que a_2 es otra raíz de $f(x)$, $a_2 \neq a_1$,

se tiene: $f(a_2) = (a_2 - a_1)c_1(a_2) = 0$

y como $a_2 \neq a_1$, resulta que $a_2 - a_1 \neq 0 \Rightarrow c_1(a_2) = 0$

y por tanto, a_2 es raíz de $c_1(x)$, de donde $c_1(x) = (x - a_2)c_2(x)$, donde $c_2(x)$ es un polinomio de un grado inferior en una unidad al grado de $c_1(x)$ y en dos unidades inferior al grado de $f(x)$ y tal que:

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2)c_2(x)$$

Supongamos entonces que f es de grado n y tiene n raíces distintas $a_1, \ldots, a_n$; continuando el proceso anterior se tiene:

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n)\, c_n(x)$$

y comparando los grados resulta:

$$n = 1 + \overset{n}{\cdots} + 1 + \partial(c_n(x))$$

es decir $\partial(c_n(x)) = 0 \Rightarrow c_n(x)$ es una constante $c_n(x) = c$ de donde $f(x) = c(x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n)$

Ejemplo:

- Obsérvese en el margen cómo se puede encontrar un polinomio de cuarto grado que tenga por raíces 1, -1, 2, 1/3 y que tome el valor numérico 8 para $x = 0$.

24. Halla un polinomio de la forma

$$x^3 + ax^2 + bx + b$$

tal que sea divisible por $x - 2$ y tome el valor numérico 10 para $x = 1$.

25. Haz la descomposición en producto de factores de grado 1 el polinomio

$$2x^3 - 7x^2 + 6x - 1$$

Como 1, -1, 2, 1/3 son raíces de $f(x)$ resulta

$$f(x) = c(x - 1)(x + 1)(x - 2)(x - 1/3)$$

para $x = 0$, $f(0) = 8$ luego

$$f(0) = 8 = c(-1)(1)(-2)(-1/3) = -2/3c$$

$c = -12$, y por tanto,

$$f(x) = -12(x - 1)(x + 1)(x - 2)(x - 1/3) = \\ = -12x^4 + 28x^3 + 4x^2 - 28x + 8$$

10 Polinomios irreducibles

10.1. Un polinomio $f(x)$ de grado mayor o igual que 1, se dice *irreducible* si no puede descomponerse en producto de dos factores de grado mayor o igual que uno.

Ejemplos:

- El polinomio $f(x) = x^2 - 3x + 2$ *no* es irreducible pues $f(x) = (x - 2)(x - 1)$.
- El polinomio $x^2 + 1$ es irreducible; en efecto supongamos

  $$x^2 + 1 = (ax + b)(a'x + b')$$

  entonces $x^2 + 1 = aa'x^2 + (ab' + ba')x + bb'$,

  de donde:

  $$\begin{aligned} aa' &= 1 \\ ab' + ba' &= 0 \\ bb' &= 1 \end{aligned}$$

  multiplicando miembro a miembro la segunda ecuación por $a'b'$, se tiene $aa'b'^2 + bb'a'^2 = 0$ y como $aa' = 1$ y $bb' = 1$, se debe tener $a'^2 + b'^2 = 0 \Rightarrow a' = 0$, $b' = 0$ y sería $x^2 + 1 = (ax + b)(0x + 0) = 0$, contradicción.

10.2. Todo polinomio de grado 1 es irreducible; en efecto, si fuese $f(x) = ax + b = p(x) \cdot q(x)$,

comparando los grados $1 = \partial(f(x)) = \partial(p(x)) + \partial(q(x))$

de donde $\partial(p(x)) = 0$ ó $\partial(q(x)) = 0$

es decir, que $p(x)$ o $q(x)$ tienen grado menor que uno.

10.3. Un polinomio $f(x)$ de grado >1 que tenga una raíz *no* es irreducible. En efecto, siendo a_1 la raíz de $f(x)$, se tiene:

$$f(x) = (x - a_1)\, c_1(x) \Rightarrow \partial(f(x)) = \partial(x - a_1) + \partial(c_1(x)) = 1 + \partial(c_1(x))$$

y como $\partial(f(x)) > 1 \Rightarrow \partial(c_1(x)) > 0$.

Resulta así que el polinomio $f(x)$ se ha podido descomponer en producto de dos factores de grado mayor o igual que 1, luego no es irreducible.

11 Teorema de factorización

Todo polinomio de grado mayor o igual que 1 *puede descomponerse en producto de polinomios irreducibles.*

Sea $f(x)$ un polinomio de grado mayor o igual que 1; si $f(x)$ es irreducible ya está demostrado, pues $f(x) = f(x) \cdot 1$, y el polinomio 1 es de grado 0. Si $f(x)$ no es irreducible entonces puede descomponerse del modo siguiente:

$$f(x) = g_1(x)\, g_2(x) \quad \text{con} \quad \partial g_1(x) \geqslant 1,\ \partial g_2(x) \geqslant 1$$

además, como $\partial f(x) = \partial g_1(x) + \partial g_2(x)$ se sigue que:

$$\partial g_1(x) < \partial f(x) \quad \text{y} \quad \partial g_2(x) < \partial f(x)$$

Si $g_1(x)$ y $g_2(x)$ son irreducibles ya está demostrado el teorema, si no, cada uno de los g_1 y g_2 se podrán descomponer a su vez en factores de grado estrictamente menor.

Continuando el proceso, como los grados van decreciendo, o llegamos a factores irreducibles o a factores de grado uno, que ya sabemos que son irreducibles; luego $f(x)$ se puede descomponer en todo caso en producto de factores irreducibles.

Nota: Un polinomio puede no ser irreducible y, sin embargo, no tener raíces reales; por ejemplo, $x^4 + 2x^2 + 1$ no es irreducible, pues, $x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2 + 1)(x^2 + 1)$, sin embargo, dado que $x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2$, este polinomio no tiene raíces reales.

26. De los siguientes polinomios indica cuáles son irreducibles y cuáles no:

a) $x^3 - 7x + 6$
b) $x^4 - 6x^2 + 8$
c) $(x^2 + 6)$
d) $x - 6$
e) $x^3 + x -$
f) $x^2 - 2x - 3$

Ejercicios y cuestiones

27. Se trata de hallar un polinomio de la forma $f(x) = x^2 + rx + s$ tal que sea divisible por $x - 1$, y que dé el mismo resto al dividirlo por $x + 1$ y $x - 2$

$f(1) = 0 = 1 + r + s = r + s = -1$; $\quad f(2) = f(-1) = 4 + 2r + s = 1 - r + s \to r$

Calcula $f(x)$.

28. Halla un polinomio de cuarto grado tal que verifique las condiciones siguientes:

a) Es divisible por $x - 1$.
b) No tiene término en x^3.
c) Su coeficiente principal es 1.
d) Toma el valor -6 en -1.
e) El resto de su división por $x - 2$ es 15.

29. ¿Es cierta la relación $(x^3 - 1) \mid (x^5 + 4)$?

30. Hallar a para que sea cierta la relación $(x^2 + ax + 1) \mid (x^3 + 2x^2 - 2x - 1)$.

31. Hallar el cociente y resto de las divisiones siguientes:

$(x^5 - 3x^2 + 6) : (x^4 - 1)$
$(x^3 + 2x - 1) : (x^5 + 6)$
$(x^6 + 1x^4 - 3x^3 + 2x + 6) : (x^3 - 5x + 1)$

32. Aplicar la regla de Ruffini para calcular el cociente y resto de las siguientes divisiones:

$(x^8 - 1) : (x - 1)$
$(x^3 - 2x^2 + 7x - 1) : (x + 2)$
$(x^5 - 3x^4 + 2x^2 - 1) : (x - 1)$
$(x^3 - 3x^2 + 6x + 1) : (2x - 3)$

33. Hallar a para que la división $(x^3 - ax^2 + 5x + 4) : (3x - 1)$ sea exacta.

34. Hallar el resto de la división de $(x^5 + 4x^3 - 2x^2 + 6x - 1)$ por $x + 4$

35. Hallar a para que el resto de la división de $x^3 + 2x - a$ por $x - 3$ sea 15.

36. El resto de dividir el polinomio $ax + b$ por $x - 1$ es 6 y el dividirlo por $x + 3$ es -10. Calcula a y b.

37. Hallar las raíces del polinomio $x^5 - 2x^4 - 3x^3 + 6x^2 + 2x - 4$.

38. Hallar un polinomio de quinto grado cuyas raíces sean 1, -1, 1, -2 y 1/4, y tal que su valor numérico en 0 es 16.

39. Se sabe que el polinomio $x^3 - 6x^2 - 7x - 6$ tiene tres raíces enteras; haz la descomposición de dicho polinomio en producto de factores.

40. De los siguientes polinomios indica los que son irreducibles:

a) $x^2 - 10x + 24$; $\quad$ b) $x^8 + 1$; $\quad$ c) $x^8 - 1$

Tema 12

CUERPO DE RAZONES ALGEBRAICAS

Al igual que en el anillo de los números enteros $\mathbb{Z}$, en el anillo $\mathbb{R}[x]$ de los polinomios con coeficientes reales, la ecuación $fg = h$ donde $f, h \in \mathbb{R}[x]$, $f \neq \mathbf{0}$ y g es un polinomio desconocido no posee en general, solución; por ejemplo, la ecuación $(x^2 + 1)g = x - 1$ no tiene solución en $\mathbb{R}[x]$, pues, si existiese tal polinomio g, dado que el grado de un producto de polinomios es la suma de los grados de los factores, se debía tener $2 + \delta g = 1$; lo cual es imposible, pues $\delta g \geqslant 0$.

El propósito de este tema es construir un cuerpo que contenga a $\mathbb{R}[x]$ y en el que esa ecuación tenga solución; es decir, en el que todo $f \in \mathbb{R}[x]$, $f \neq \mathbf{0}$ tenga inverso. Para ello, vamos a seguir un método totalmente análogo al utilizado para construir $\mathbb{Q}$ a partir de $\mathbb{Z}$. Es recomendable por tanto, que el alumno repase dicha construcción y que a lo largo del estudio de este tema compare cada paso con los de la mencionada construcción de $\mathbb{Q}$.

1 Fracciones algebraicas

Sea $(\mathbb{R}[x])^*$ el conjunto de todos los polinomios con coeficientes reales distintos del polinomio cero, esto es

$$(\mathbb{R}[x])^* = \mathbb{R}[x] - \{\mathbf{0}\}$$

Consideremos el conjunto $\mathbb{R}[x] \times (\mathbb{R}[x])^*$, es decir, el conjunto de los pares (f, g) donde $f \in \mathbb{R}[x]$ y $g \in (\mathbb{R}[x])^*$.

Un par (f, g) lo escribiremos en la forma $\dfrac{f}{g}$ y lo llamaremos *fracción algebraica; f* es el *numerador* de la fracción y g el *denominador.*

Ejemplo:

$$\frac{x}{x^2 + 3}, \quad \frac{1}{2x - 1}, \quad \frac{3}{1}, \quad \frac{x^3 - 1}{x^2}$$

son fracciones algebraicas, mientras que $\dfrac{x^2 - 5}{\mathbf{0}}$ *no* lo es, pues el denominador es el polinomio cero.

1. De las expresiones:

a) $\dfrac{x^2}{3}$ b) $\dfrac{x - 1}{x^2 + 5}$ c) $\dfrac{\mathbf{0}}{2x^2 + 1}$

d) $\dfrac{7x - 1}{\mathbf{0}}$ e) $\dfrac{\sqrt{x}}{x^2 + 1}$

di cuáles son fracciones algebraicas y cuáles no lo son, e indica los numeradores y denominadores.

2 Equivalencia de fracciones algebraicas

2.1. Se dice que las fracciones algebraicas f/g y f'/g' son *equivalentes* y se escribe $\frac{f}{g} \sim \frac{f'}{g'}$ si

$$fg' = gf'$$

Ejemplos:

- Las fracciones $\quad \frac{1}{x} \quad$ y $\quad \frac{x^2 - 3}{x^3 - 3x}$

  son equivalentes pues $\quad 1(x^3 - 3x) = x(x^2 - 3)$

- Las fracciones $\quad \frac{x^2 - 1}{x + 3} \quad$ y $\quad \frac{2x}{x + 1}$

  no son equivalentes pues

  $(x^2 - 1)(x + 1) = x^3 + x^2 - x - 1 \neq 2x(x + 3) = 2x^2 + 6x$

2.2. Teorema:

La relación $\sim$ es de equivalencia en el conjunto de las fracciones algebraicas.

La comprobación de las propiedades reflexiva y simétrica es inmediata y puede realizarla el alumno como ejercicio; en el esquema a la derecha se demuestra que la relación es transitiva.

En ①, ① y ⑤ se ha aplicado la definición de $\sim$.

En ② y ② se ha multiplicado por g'' y g respectivamente.

Explica los pasos ③ y ④.

El conjunto cociente $\frac{\mathbb{R}[x] \times (\mathbb{R}[x])^*}{\sim}$ se representa por $\mathbb{R}(x)$ y la clase equivalencia de la fracción f/g se escribe $\left[\frac{f}{g}\right]$ y se llama una *razón algebraica.*

2.3. Teorema:

Si se multiplican numerador y denominador de una fracción algebraica por un mismo polinomio distinto de cero, la fracción resultante es equivalente a la primera.

En efecto, sea la fracción f/g y sea $h \in (\mathbb{R}[x])^*$, entonces, dado que $fgh = fgh$, se sigue que

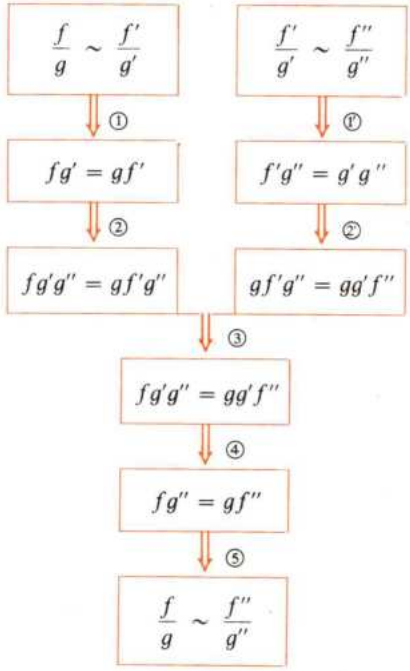
$$\frac{fh}{gh} \sim \frac{f}{g}$$

2. ¿Son equivalentes las fracciones

$$\frac{x - 1}{x^2 + 1} \quad \text{y} \quad \frac{x}{x^2 + 3}?$$

¿y las $\frac{0}{x^2 - 3}$, $\frac{0}{6x + 4}$?

Propiedad transitiva



Este teorema permite *simplificar* una razón algebraica puesto que si tenemos la razón algebraica

$$\alpha = \left[\frac{f}{g}\right]$$

y numerador y denominador tienen un factor común h, entonces $f = hf'$ y $g = hg'$, de donde

$$\frac{f}{g} = \frac{hf'}{hg'} \sim \frac{f'}{g'} \quad \text{luego} \quad \alpha = \left[\frac{f}{g}\right] = \left[\frac{f'}{g'}\right]$$

Ejemplos:

- Sea $\alpha = \left[\dfrac{x^2 - 1}{x + 1}\right]$,

  entonces $\dfrac{x^2 - 1}{x + 1} = \dfrac{(x + 1)(x - 1)}{x + 1} \sim \dfrac{x - 1}{1}$

  de donde $\alpha = \left[\dfrac{x - 1}{1}\right]$

- Simplifiquemos ahora la razon β

  $$\beta = \left[\frac{x^3 - 2x^2}{x^5 - 2x^4}\right],$$

  entonces $\dfrac{x^3 - 2x^2}{x^5 - 2x^4} = \dfrac{x^2(x - 2)}{x^4(x - 2)} \sim \dfrac{1}{x^2}$

  de donde $\beta = \left[\dfrac{1}{x^2}\right]$

2.4. *Consecuencia*

Dos razones algebraicas tienen siempre representantes con el mismo denominador.

Sean las razones algebraicas

$$\left[\frac{f}{g}\right] \text{ y } \left[\frac{f'}{g'}\right].$$

Estas tienen también como representantes:

$$\frac{fg'}{gg'} \quad \text{y} \quad \frac{f'g}{gg'}$$

Vamos a reducir a común denominador las razones α y β

$$\alpha = \left[\frac{2x}{x - 1}\right]; \quad \beta = \left[\frac{x^2}{x + 1}\right]$$

$$\frac{2x}{x - 1} \sim \frac{2x(x + 1)}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{2x^2 + 2x}{x^2 - 1}; \quad \alpha = \left[\frac{2x^2 + 2x}{x^2 - 1}\right]$$

$$\frac{x^2}{x + 1} \sim \frac{x^2(x - 1)}{(x + 1)(x - 1)} = \frac{x^3 - x^2}{x^2 - 1}; \quad \beta = \left[\frac{x^3 - x^2}{x^2 - 1}\right]$$

3. Simplifica las razones algebraicas:

   $\alpha = \left[\dfrac{x^6 + x^4}{x^2 + 2x}\right] \quad \beta = \left[\dfrac{x^3 - 1}{x + 1}\right]$

   $\gamma = \left[\dfrac{2x^4 + 3x^2 - 5}{x^2 + 2x + 1}\right]$

   Observa que en γ, numerador y denominador se anulan para $x = -1$.

4. Reduce a común denominador

   $$\left[\frac{3x + 1}{x - 1}\right] \quad \text{y} \quad \left[\frac{x^2 + 1}{x + 1}\right]$$

5. Teniendo en cuenta que $x^2 - 1$ es un múltiplo de $x - 1$, $x + 1$ y $x^2 - 1$, halla representantes de igual denominador de las razones algebraicas siguientes:

   $$\left[\frac{x}{x - 1}\right]; \quad \left[\frac{x^2 + 1}{x + 1}\right]; \quad \left[\frac{x^3 - x + 3}{x^2 - 1}\right]$$

3 Adición de razones algebraicas

3.1. Sean $\alpha = \left[\frac{f}{g}\right]$ y $\beta = \left[\frac{f'}{g'}\right]$

dos razones algebraicas.

Se define la adición de α y β, y se escribe $\alpha + \beta$, como:

$$\alpha + \beta = \left[\frac{fg' + f'g}{gg'}\right]$$

Ejemplo:

- Sea $\alpha = \left[\frac{x^2 + 1}{x + 1}\right]$ y $\beta = \left[\frac{x - 3}{x^5 + 1}\right]$,

entonces

$$\alpha + \beta = \left[\frac{(x^2 + 1)(x^5 + 1) + (x - 3)(x + 1)}{(x + 1)(x^5 + 1)}\right] = \left[\frac{x^7 + x^5 + 2x^2 - 2x - 2}{x^6 + x^5 + x + 1}\right]$$

3.2. *La suma de razones algebraicas no depende de los representantes elegidos.*

Sea $\alpha = \left[\frac{f}{g}\right] = \left[\frac{A}{B}\right]$ y $\beta = \left[\frac{f'}{g'}\right] = \left[\frac{A'}{B'}\right]$

tenemos que probar que:

$$\left[\frac{fg' + f'g}{gg'}\right] = \left[\frac{AB' + A'B}{BB'}\right]$$

Al margen se encuentra el esquema de la demostración de esta propiedad; en él se ha tenido en cuenta:

En ①, ①' y ⑦ que dos fracciones algebraicas de la misma clase están relacionadas.

En ②, ②' y ⑥ la definición de la relación $\sim$.

En ③ se han multiplicado los dos miembros de la igualdad por $g'B'$, y en ③' se han multiplicado por gB.

En ④ se han sumado las dos igualdades miembro a miembro.

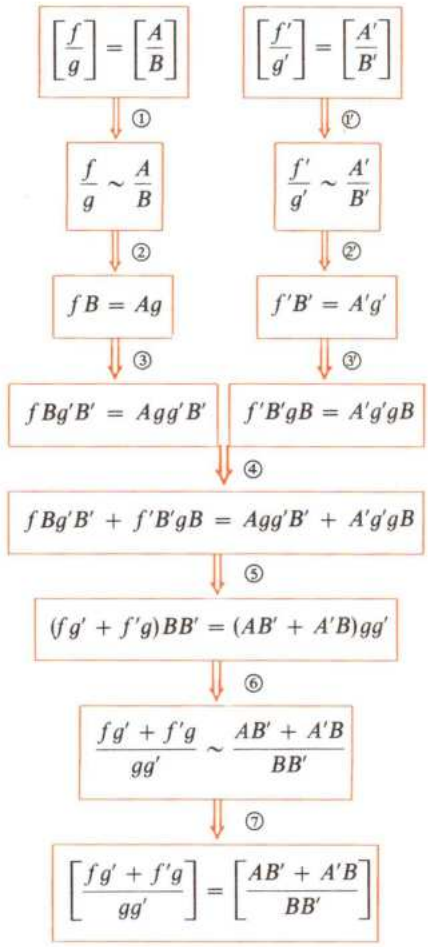
¿Qué propiedad del anillo $\mathbb{R}[x]$ se ha aplicado en ⑤?

6. Suma las siguientes razones algebraicas, simplificando previamente, si es posible, las razones:

a) $\left[\frac{x - 1}{x^3 + 1}\right] + \left[\frac{2x}{4x^2 + 3}\right]$

b) $\left[\frac{x}{4}\right] + \left[\frac{7}{x^2 - 1}\right]$

c) $\left[\frac{x^2 - 6}{x - 6}\right] \quad \left[\frac{2}{4 + 6x}\right]$



3.3. Sean $\alpha = \left[\frac{f}{g}\right]$ y $\beta = \left[\frac{f'}{g}\right]$ dos razones algebraicas con representantes del mismo denominador. Se tiene:

$$\alpha + \beta = \left[\frac{f}{g}\right] + \left[\frac{f'}{g}\right] = \left[\frac{fg + gf'}{gg}\right] = \left[\frac{(f + f')g}{gg}\right] = \left[\frac{f + f'}{g}\right]$$

La suma de dos razones algebraicas que tienen por representantes fracciones de igual denominador, es otra razón cuyo representante tiene por numerador la suma de los numeradores y por denominador el denominador común.

Ejemplo:

$$\left[\frac{x^2}{x+1}\right] + \left[\frac{x+6}{x^3+3x^2+3x+1}\right]$$

dado que $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x+1)^3$, un múltiplo común de los denominadores es $(x+1)^3$, luego $\left[\frac{x^2}{x+1}\right] = \left[\frac{x^2(x+1)^2}{(x+1)^3}\right]$

y por tanto:

$$\left[\frac{x^2}{x+1}\right] + \left[\frac{x+6}{x^3+3x^2+3x+1}\right] = \left[\frac{x^2(x+1)^2}{(x+1)^3}\right] +$$

$$+ \left[\frac{x+6}{(x+1)^3}\right] = \left[\frac{x^2(x+1)^2 + (x+6)}{(x+1)^3}\right] =$$

$$= \left[\frac{x^4 + 2x^3 + x^2 + x + 6}{(x+1)^3}\right]$$

7. Reduce a un común denominador las fracciones algebraicas:

$$\frac{x^2}{x+1}, \quad \frac{x^3-1}{x^2+x}, \quad \frac{x^3+4}{2x+7}$$

8. Reduce a un común denominador las fracciones algebraicas:

$$\frac{6x+1}{(x-1)^3}, \quad \frac{2x^3+4}{(x-1)(x+3)}, \quad \frac{4x^2}{6x^7(x-1)}$$

9. Suma las razones algebraicas:

$$\left(\left[\frac{x^2+1}{x+1}\right] + \left[\frac{x+3}{x^2-1}\right]\right) + \left[\frac{2x^2-5}{x^4-1}\right]$$

y compara el resultado con la suma

$$\left[\frac{x^2+1}{x+1}\right] + \left(\left[\frac{x+3}{x^2-1}\right] + \left[\frac{2x^2-5}{x^4-1}\right]\right)$$

4 Propiedades de la adición de razones algebraicas

La adición de razones algebraicas tiene las propiedades:

4.1. *Asociativa.*

Dadas tres razones algebraicas cualesquiera se verifica:

$$\left[\frac{f}{g}\right] + \left(\left[\frac{f'}{g}\right] + \left[\frac{f''}{g}\right]\right) = \left(\left[\frac{f}{g}\right] + \left[\frac{f'}{g}\right]\right) + \left[\frac{f''}{g}\right]$$

En efecto

$$\left[\frac{f}{g}\right] + \left(\left[\frac{f'}{g}\right] + \left[\frac{f''}{g}\right]\right) = \left[\frac{f}{g}\right] + \left[\frac{f' + f''}{g}\right] = \left[\frac{f + (f' + f'')}{g}\right]$$

$$\left(\left[\frac{f}{g}\right] + \left[\frac{f'}{g}\right]\right) + \left[\frac{f''}{g}\right] = \left[\frac{f + f'}{g}\right] + \left[\frac{f''}{g}\right] = \left[\frac{(f + f'') + f''}{g}\right]$$

y $f + (f' + f'') = (f + f') + f''$, por las asociatividad de la adición de polinomios.

10. Suma las razones:

$$\left[\frac{x^3+1}{x^2-1}\right] + \left[\frac{x^5-1}{x^4+1}\right]$$

$$\left[\frac{x+1}{2x-1}\right] + \left[\frac{7}{4x}\right] + \left[\frac{x^2-2}{2x+4}\right]$$

$$\left[\frac{1}{4}\right] + \left[\frac{3x}{x^2+1}\right] + \left[\frac{2x}{4}\right]$$

4.2. *Conmutativa.*

Si $\left[\frac{f}{g}\right], \left[\frac{f'}{g}\right] \in \mathbb{R}(x)$

se verifica:

$$\left[\frac{f}{g}\right] + \left[\frac{f'}{g}\right] = \left[\frac{f'}{g}\right] + \left[\frac{f}{g}\right]$$

ya que

$$\left[\frac{f}{g}\right] + \left[\frac{f'}{g}\right] = \left[\frac{f + f'}{g}\right] = \left[\frac{f' + f}{g}\right] = \left[\frac{f'}{g}\right] + \left[\frac{f}{g}\right]$$

4.3. *Existe elemento neutro*, que es la razón

$$\alpha = \left[\frac{\mathbf{0}}{g}\right]$$

$$\left[\frac{f}{g}\right] + \left[\frac{\mathbf{0}}{g}\right] = \left[\frac{f + \mathbf{0}}{g}\right] = \left[\frac{f}{g}\right]$$

La razón $\left[\frac{\mathbf{0}}{g}\right]$ se designa también por $\mathbf{0}$.

4.4. *Toda razón algebraica tiene una opuesta;* en efecto, dada

$$\alpha = \left[\frac{f}{g}\right] \qquad -\alpha = \left[\frac{-f}{g}\right],$$

es tal que

$$\alpha + (-\alpha) = \left[\frac{f}{g}\right] + \left[\frac{-f}{g}\right] = \left[\frac{f + (-f)}{g}\right] = \left[\frac{\mathbf{0}}{g}\right] = \mathbf{0}$$

(elemento neutro).

Dada $\alpha = \left[\frac{x^2 - 1}{3x - 4}\right]$ su opuesta es: $-\alpha = \left[\frac{-x^2 + 1}{3x + 4}\right]$

pues $\alpha + (-\alpha) = \mathbf{0}$

11. En la práctica, la razón algebraica $\left[\frac{f}{g}\right]$ a veces se escribe simplemente $\frac{f}{g}$

Calcula: $\frac{1}{3} - \frac{2x}{4x^2 + 3} - \frac{x + 1}{3x + 2}$

$$\frac{x - 1}{x^2 + 6} - \frac{x^2 - 1}{x + 3}$$

12. Calcula:

$$\frac{x}{x + 1} + \frac{2x}{x - 1} + \frac{1}{x^2 - 1}$$

5 Sustracción de razones algebraicas

Si α y β son dos razones algebraicas se define la *diferencia* $\alpha - \beta$ como $\alpha + (-\beta)$

es decir $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$

Ejemplo:

$$\alpha = \left[\frac{2x+3}{x^3+1}\right] \quad \text{y} \quad \beta = \left[\frac{x^2+3}{x^2-1}\right]$$

entonces

$$-\beta = \left[\frac{-x^2-3}{x^2-1}\right] \quad \text{y} \quad \alpha - \beta =$$

$$= \alpha + (-\beta) = \left[\frac{2x-3}{x^3+1}\right] + \left[\frac{-x^2-3}{x^2-1}\right] =$$

$$= \left[\frac{(2x-3)(x^2-1)+(x^3+1)(-x^2-3)}{(x^3+1)(x^2-1)}\right] =$$

$$= \left[\frac{-x^5-x^3-4x^2-2x}{(x^3+1)(x^2-1)}\right]$$

13. Encuentra una razón algebraica α tal que

$$\alpha + \frac{x+1}{2x} = \frac{x^2+3}{x-1}$$

6 El grupo $(\mathbb{R}(x), +)$

En el cuadro siguiente se resumen las propiedades de la adición de razones algebraicas que permiten afirmar que $(\mathbb{R}(x), +)$ es un grupo abeliano.

$\left[\frac{f}{g}\right] \in \mathbb{R}(x)$ $\left[\frac{f'}{g}\right] \in \mathbb{R}(x)$ $\left[\frac{f''}{g}\right] \in \mathbb{R}(x)$		**CONJUNTO:** $\mathbb{R}(x) = \{$**razones algebraicas**$\}$	**Grupo** / **Grupo abeliano**
		OPERACION DEFINIDA: ADICION $(+)$	
PROPIEDADES	**Asociativa**	$\left[\frac{f}{g}\right] + \left(\left[\frac{f'}{g}\right] + \left[\frac{f''}{g}\right]\right) = \left(\left[\frac{f}{g}\right] + \left[\frac{f'}{g}\right]\right) + \left[\frac{f''}{g}\right]$	
	Elemento neutro $\mathbf{0} = \left[\frac{0}{g}\right]$	$\left[\frac{f}{g}\right] + \left[\frac{0}{g}\right] = \left[\frac{0}{g}\right] + \left[\frac{f}{g}\right] = \left[\frac{f}{g}\right]$	
	Cada razón algebraica $\left[\frac{f}{g}\right]$ **tiene una opuesta** $\left[\frac{-f}{g}\right]$	$\left[\frac{f}{g}\right] + \left[\frac{-f}{g}\right] = \left[\frac{0}{g}\right]$	
	Conmutativa	$\left[\frac{f}{g}\right] + \left[\frac{f'}{g}\right] = \left[\frac{f'}{g}\right] + \left[\frac{f}{g}\right]$	

7 Multiplicación de razones algebraicas

7.1. Sea

$$\alpha = \left[\frac{f}{g}\right] \quad \text{y} \quad \beta = \left[\frac{f'}{g'}\right]$$

dos razones algebraicas; se define la multiplicación de ambas, y se designa por $\alpha \cdot \beta$ o $\alpha\beta$, del modo siguiente:

$$\alpha\beta = \left[\frac{ff'}{gg'}\right]$$

Ejemplo

- Sea $\alpha = \left[\dfrac{x+1}{x^2-1}\right]$ y $\beta = \left[\dfrac{x}{x^2+1}\right]$,

entonces

$$\alpha\beta = \left[\frac{(x+1)x}{(x^2-1)(x^2+1)}\right] = \left[\frac{(x+1)x}{(x+1)(x-1)(x^2+1)}\right]$$

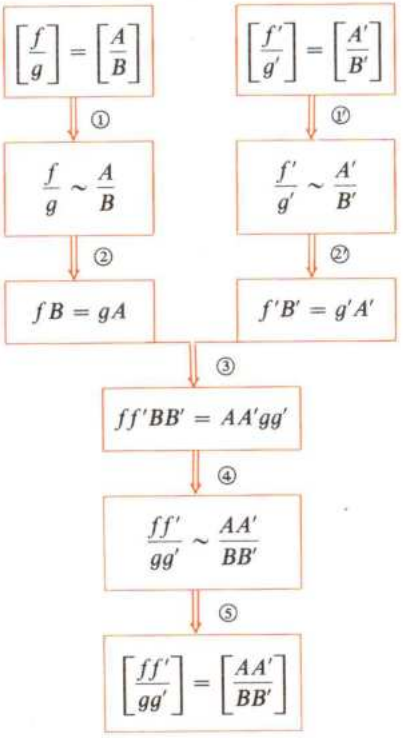
que simplificando, resulta

$$\alpha\beta = \left[\frac{x}{(x-1)(x^2+1)}\right] = \left[\frac{x}{x^3-x^2+x-1}\right]$$

7.2. *El producto de razones algebraicas no depende de los representantes elegidos.*

Al margen se encuentra el esquema de la demostración de esta propiedad.

El alumno debe explicar cada uno de los pasos ①, ①', ②, ②', ③, ④ y ⑤, de manera análoga a como se hizo en la adición.



8 Propiedades de la multiplicación de razones algebraicas

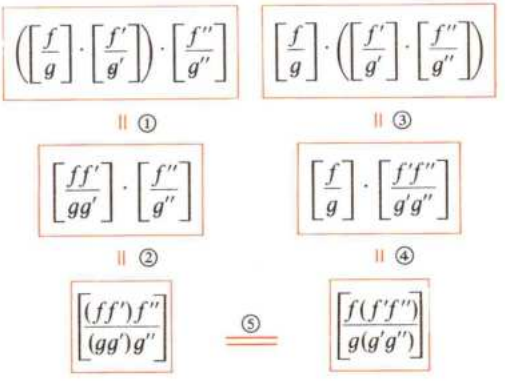
La multiplicación de razones algebraicas tiene las siguientes propiedades:

8.1. *Asociativa*

$$\left(\left[\frac{f}{g}\right]\cdot\left[\frac{f'}{g'}\right]\right)\cdot\left[\frac{f''}{g''}\right] = \left[\frac{f}{g}\right]\cdot\left(\left[\frac{f'}{g'}\right]\cdot\left[\frac{f''}{g''}\right]\right)$$

al margen aparece el esquema de la demostración.

Razona cada uno de los pasos ①, ②, ③, ④ y ⑤ indicando las definiciones o propiedades que se aplican.



8.2. *Conmutativa*

$$\left[\frac{f}{g}\right]\cdot\left[\frac{f'}{g'}\right]=\left[\frac{f'}{g'}\right]\cdot\left[\frac{f}{g}\right]$$

En efecto:

$$\left[\frac{f}{g}\right]\cdot\left[\frac{f'}{g'}\right]=\left[\frac{ff'}{gg'}\right]=\left[\frac{f'f}{g'g}\right]=\left[\frac{f'}{g'}\right]\cdot\left[\frac{f}{g}\right]$$

8.3. *Existe elemento neutro*, que es la razón

$$\left[\frac{1}{1}\right]=\left[\frac{h}{h}\right]$$

$$\left[\frac{f}{g}\right]\cdot\left[\frac{h}{h}\right]=\left[\frac{fh}{gh}\right]=\left[\frac{f}{g}\right]$$

La razón [1/1] se designa también por 1.

8.4. *Propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición.*

$$\left[\frac{f}{g}\right]\cdot\left(\left[\frac{h}{m}\right]+\left[\frac{p}{m}\right]\right)=\left[\frac{f}{g}\right]\cdot\left[\frac{h}{m}\right]+\left[\frac{f}{g}\right]\cdot\left[\frac{p}{m}\right]$$

Desarrollando ambos miembros se llega al mismo resultado como se muestra a continuación.

$$\left[\frac{f}{g}\right]\cdot\left(\left[\frac{h}{m}\right]+\left[\frac{p}{m}\right]\right)=\left[\frac{f}{g}\right]\cdot\left[\frac{h+p}{m}\right]=$$

$$=\left[\frac{f(h+p)}{gm}\right]=\left[\frac{fh+fp}{gm}\right]$$

$$\left[\frac{f}{g}\right]\cdot\left[\frac{h}{n}\right]+\left[\frac{f}{g}\right]\cdot\left[\frac{p}{m}\right]=\left[\frac{fh}{gm}\right]\cdot\left[\frac{fp}{gm}\right]=\left[\frac{fh+fp}{gm}\right]$$

14. Multiplica las razones:

$$\left[\frac{x-1}{2x^2+4}\right]\cdot\left[\frac{0}{x^3-1}\right]$$

$$\left(\left[\frac{x}{4}\right]\cdot\left[\frac{2x^2-1}{x^6+8}\right]\right)\cdot\left[\frac{x^3+1}{x-1}\right]$$

15. Calcula:

$$\left[\frac{x-1}{x+4}\right]\cdot\left[\frac{x+4}{x-1}\right]$$

y comprueba que dicho producto es 1.

16. Calcula $\alpha(\beta\gamma)$ y $(\alpha\beta)\gamma$, siendo

$$\alpha=\left[\frac{x-1}{x+1}\right]\quad \beta=\left[\frac{x^2-1}{x^2+1}\right]\quad \gamma=\left[\frac{4}{3x}\right]$$

y comprueba que los resultados son iguales.

9 El anillo $(\mathbb{R}(x), +, \cdot)$

Se ha probado que $(\mathbb{R}(x), +)$ es un grupo conmutativo. Como la multiplicación tiene las propiedades estudiadas en **8.1.**, **8.2.** y **8.3.**, entonces $(\mathbb{R}(x), \cdot)$ es un semigrupo conmutativo y unitario. Al ser la multiplicación distributiva respecto de la adición resulta que $(\mathbb{R}(x), +, \cdot)$ *es un anillo conmutativo y unitario.*

10 Elemento inverso

10.1. Todo elemento distinto de la razón $[\mathbf{0}/A]$ posee inverso.

Sea $\alpha = [A/B]$ distinta de la razón cero, entonces $A \neq \mathbf{0}$, luego $\alpha^{-1} = [B/A]$ es una razón algebraica, pues, el denominador es distinto del polinomio cero; además

$$\alpha \cdot \alpha^{-1} = \left[\frac{A}{B}\right] \cdot \left[\frac{B}{A}\right] = \left[\frac{AB}{BA}\right] = 1$$

de donde α tiene inverso que es $\alpha^{-1} = [B/A]$.

10.2. Designemos por $\mathbb{R}(x)^*$, el conjunto $\mathbb{R}(x)$ sin el cero

$$\mathbb{R}(x)^* = \mathbb{R}(x) - \{\mathbf{0}\}$$

El par $(R(x)^*, \cdot)$ es un grupo conmutativo; por esta razón en este grupo se puede definir la operación inversa, la división.

17. Halla la inversa de las razones

$$\alpha = \left[\frac{3x + 2}{5x^2 - 8}\right]$$

$$\beta = \left[\frac{5x + 1}{8x^2 - 7}\right]$$

11 División de razones algebraicas

Sean α y β dos razones algebraicas con $\beta \neq 0$.
Se define el cociente de α por β como el producto de α por el inverso de β

$$\alpha/\beta = \alpha \cdot \beta^{-1}$$

Ejemplos:

- Sea $\alpha = \left[\frac{x - 1}{x^2}\right]$ y $\beta = \left[\frac{4}{3x + 2}\right]$

  entonces $\frac{\alpha}{\beta} = \alpha\beta^{-1} = \left[\frac{x - 1}{x^2}\right] \cdot \left[\frac{3x + 2}{4}\right] = \left[\frac{3x^2 - 3x - 2}{4x^2}\right]$

- Sea $\alpha = \left[\frac{1}{x^2 + 1}\right]$ y $\beta = \left[\frac{x + 3}{2x + 1}\right]$

  vamos a encontrar una razón algebraica tal que $\alpha\gamma = \beta$, se tiene:

$$\gamma = \beta\alpha^{-1} = \left[\frac{x + 3}{2x + 1}\right] \cdot \left[\frac{x^2 + 1}{1}\right] = \left[\frac{x^3 + 3x^2 + x + 3}{2x + 1}\right]$$

18. Calcula:

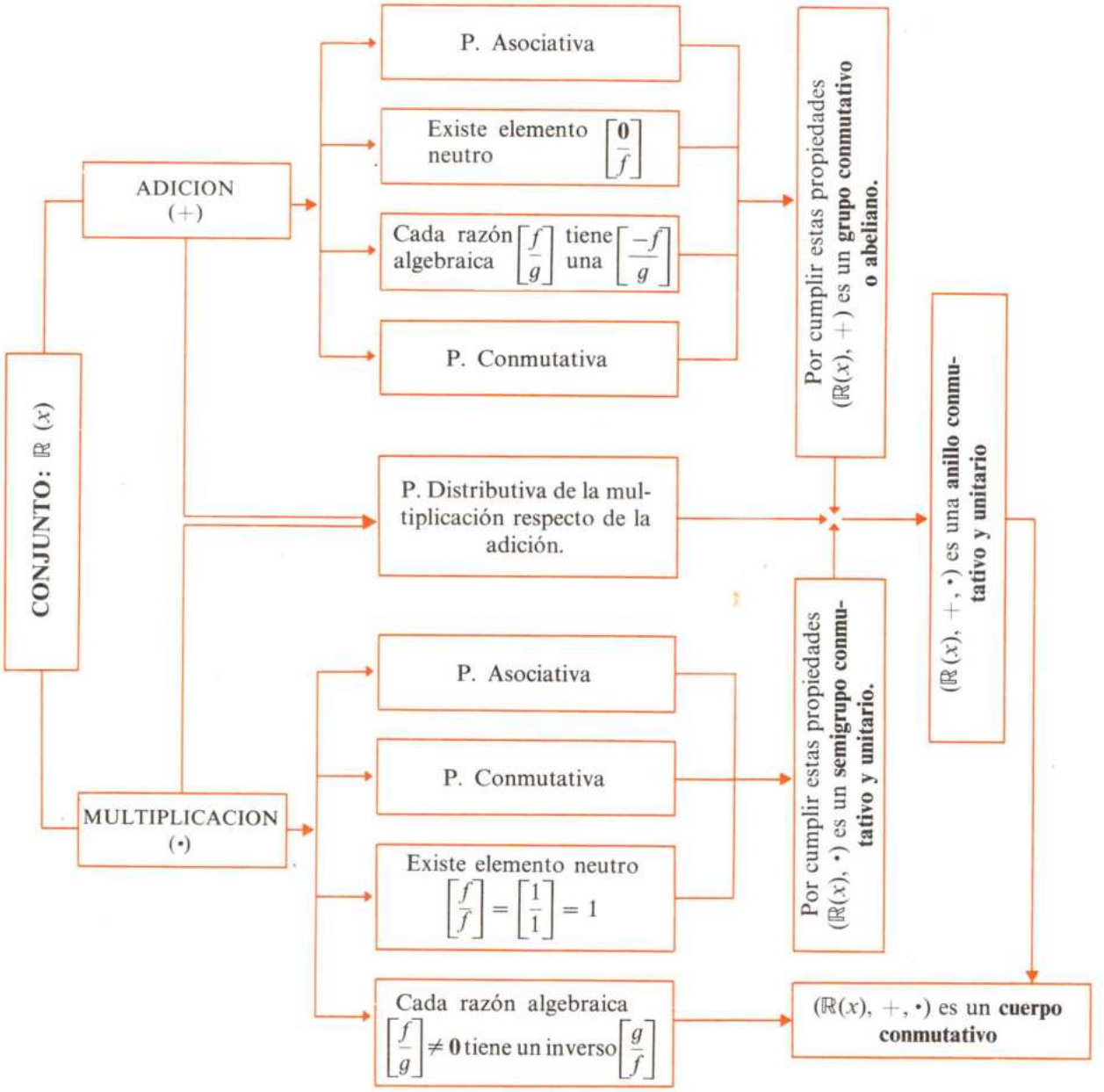
a) $\frac{\alpha}{\beta}$, siendo α y β las razones del ejercicio anterior.

b) $\frac{\alpha_1}{\beta_1}$, siendo $\alpha_1 = \left[\frac{3x^2 + 2x}{x^2 - 4}\right]$ y $\beta_1 = \left[\frac{x + 2}{x^3 + x}\right]$

c) $\frac{\alpha_2}{\beta_2}$, siendo $\alpha_2 = \left[\frac{4x}{4 + 5}\right]$ y $\beta_2 = \left[\frac{2x^2}{x^2 - 25}\right]$

12 El cuerpo $(\mathbb{R}(x), +, \cdot)$

En el siguiente esquema de resumen las propiedades de la adición y multiplicación de las razones algebraicas, que permiten afirmar que $(\mathbb{R}(x), +, \cdot)$ es un cuerpo.



13 Isomorfismo de $\mathbb{R}[x]$ en una parte de $\mathbb{R}(x)$

13.1. Consideremos ahora el subconjunto $\mathbb{R}(x)_{(1)}$ de $\mathbb{R}(x)$ formado por las razones algebraicas que tienen un representante de la forma $[f/1]$ donde 1 representa el polinomio unidad; entonces la aplicación

$$\varphi : \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}(x)_{(1)} \text{ dada por } \varphi(f) = [f/1]$$

verifica:

$$\varphi(f+g) = \left[\frac{f+g}{1}\right] = \left[\frac{f}{1}\right] + \left[\frac{g}{1}\right] = \varphi(f) + \varphi(g)$$

$$\varphi(fg) = \left[\frac{fg}{1}\right] = \left[\frac{f}{1}\right] \cdot \left[\frac{g}{1}\right] = \varphi(f) \cdot \varphi(g)$$

Además φ es biyectiva, de aquí que $\mathbb{R}(x)$ contiene un subconjunto $\mathbb{R}(x)_{(1)}$ isomorfo al anillo de polinomios $\mathbb{R}[x]$. Mediante este isomorfismo se identifica el polinomio f con la razón algebraica $[f/1]$.

13.2. Supongamos ahora que queremos resolver la ecuación $fh = g$, donde f y g son polinomios, $f \neq \mathbf{0}$ y h es la incógnita; identificando cada polinomio con la razón correspondiente, se tiene

$$\left[\frac{f}{1}\right] h = \left[\frac{g}{1}\right] \Rightarrow h = \left[\frac{g}{1}\right] \cdot \left[\frac{1}{f}\right] = \left[\frac{g}{f}\right] \in \mathbb{R}(x)$$

Ejemplo:

- Vamos a resolver la ecuación $(x^2+1)h = 3x - 8$

$$h = \left[\frac{(3x-8)}{1}\right] \cdot \left[\frac{(x^2+1)^{-1}}{1}\right] = \left[\frac{3x-8}{x^2+1}\right]$$

- Determinemos p para que se verifique:

$$(x^3 - x)p = (x^2-1)(x+3)$$

Haciendo uso del isomorfismo anterior resulta:

$$\left[\frac{x^3-x}{1}\right] p = \left[\frac{(x^2-1)(x+3)}{1}\right]$$

$$p = \left[\frac{(x^2-1)(x+3)}{1}\right] \cdot \left[\frac{1}{x^3-x}\right] = \left[\frac{(x^2-1)(x+3)}{x^3-x}\right] =$$

$$= \left[\frac{(x^2-1)(x+3)}{x(x^2-1)}\right] = \left[\frac{x+3}{x}\right]$$

19. Resuelve las siguientes ecuaciones:
   a) $(x^3+2)g = x^3+1$
   b) $(x^3-8)h = (x-2)(x+1)$
   c) $(x+3)f = x+6$
   d) $(x^2+2)k = x^2+3$
   e) $(x^2-4)f_1 = x-2$.

Ejercicios y cuestiones

20. Sea $\alpha = \dfrac{x^2 + 2}{6x + 8}$ y $\beta = \dfrac{x + 3}{2x - 1}$

Calcula $\dfrac{\alpha}{\beta}$ y $\dfrac{\beta}{\alpha}$

21. Resuelve la ecuación entre razones algebraicas $(\alpha + \beta)\gamma = \delta$

donde $\delta = \dfrac{x}{1 + x^2}$, $\gamma = \dfrac{2}{3x^2 + 5x - 1}$, $\beta = \dfrac{x^2 + 1}{2x - 3}$

22. Demuestra que el producto de razones algebraicas es conmutativo.

23. Sea $\alpha = \dfrac{x}{2x - 1}$, $\beta = \dfrac{x^2 + 2}{x^3 - 1}$.

Calcula $(\alpha\beta)$ y $\alpha'\beta'$ y compara los resultados.

24. ¿Son equivalentes las fracciones algebraicas $\dfrac{x}{2x^2 + 3}$ y $\dfrac{x}{2x^2 - 2x + 3}$?

25. Dada la fracción algebraica $\dfrac{x - 1}{3x^2 + 4}$. Encontrar un polinomio $A(x)$ tal que

$$\frac{x - 1}{3x^2 + 4} \sim \frac{A(x)}{3x^4 - 11x^2 - 20}$$

26. Simplifica las siguientes razones algebraicas

$$\alpha = \frac{x}{6x^2 - x}, \qquad \beta = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}, \qquad \gamma = \frac{(x^2 - 1)(x + 4)x^2}{x(x - 1)(x + 4)^2}$$

27. Reduce a un denominador común las fracciones:

$$\frac{x^2 - 1}{x + 3}, \quad \frac{x^2 + 6}{x^2 + 9}, \quad \frac{x - 1}{x^2 - 9}, \quad \frac{x^3 + 5}{x^4 + 18x^2 + 81}$$

28. Suma las razones algebraicas del ejercicio **23**.

29. Resta las razones $\dfrac{x + 1}{2x^2 - 3}, \dfrac{6x}{x + 4}$

30. Resuelve la ecuación $\alpha^{-1}(\beta + \alpha) = \gamma^2$ donde $\beta = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ y $\gamma = \dfrac{3x^2}{2x - 1}$

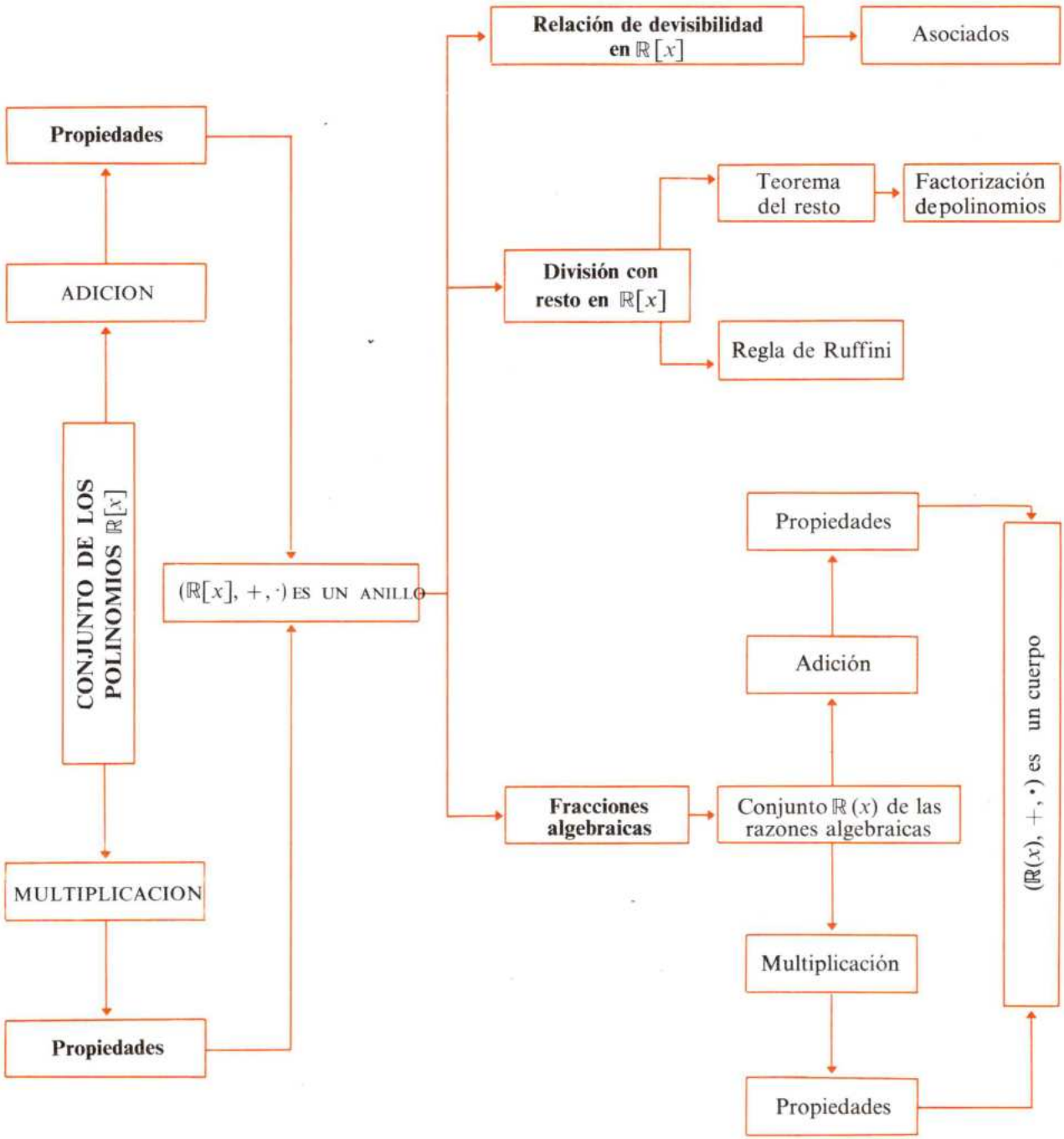
31. Demuestra que el producto de razones algebraicas es asociativo y distributivo. ¿Cuál es la única razón algebraica que no tiene inverso?

32. Calcula el cociente β/γ de las razones del problema **26.**

33. Resuelve la ecuación en $\mathbb{R}(x)$ $\left[\dfrac{3x}{2x^2 - 6}\right]\alpha = (2x - 1)^2$

DIAGRAMA ESTRUCTURAL DE LA UNIDAD

POLINOMIOS



Unidad 5

FUNCIONES POLINOMICAS Y SU REPRESENTACION GRAFICA

En esta Unidad vamos a estudiar un tipo muy particular y muy importante de aplicaciones del conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales en sí mismo. Estas aplicaciones se llamarán *polinómicas* y serán aplicaciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que se pueden representar mediante polinomios.

El primer tema de la Unidad está dedicado a estudiar el conjunto de todas las aplicaciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ y obtener las polinómicas como un caso muy sencillo de dichas aplicaciones.

El segundo tema se dedica al estudio y representación gráfica de las funciones polinómicas más sencillas; es decir, a las representadas por polinomios de grado 0, 1 y 2.

En toda la Unidad tomaremos como sinónimos los términos de aplicación y función; es de notar, que el término función se utiliza más frecuentemente cuando se trata de aplicaciones que tienen por recorrido un conjunto de números.

Tema 13

1. Funciones reales de variable real.
2. Adición de funciones.
3. Propiedades de la adición de funciones.
4. Sustracción de funciones.
5. El grupo $\mathscr{F}((\mathbb{R}, \mathbb{R}), +)$ de las funciones $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.
6. Multiplicación de funciones.
7. Propiedades de la multiplicación de funciones.
8. El anillo $(\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \cdot)$.
9. Funciones polinómicas.

Tema 14

1. Coordenadas cartesianas en el plano.
2. Representación gráfica de una función $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
3. Simetrías de una función $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
4. Representación gráfica de las funciones polinómicas de grado cero.
5. Gráfica de las funciones polinómicas de grado uno.
6. Gráfica de las funciones afines a intervalos.
7. Gráfica de la función polinómica de grado dos.

Tema 13 FUNCIONES POLINOMICAS

En este tema, vamos a dar al conjunto de todas las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ una estructura de anillo mediante la definición en dicho conjunto de dos operaciones internas.

Las funciones polinómicas, aparecerán como un subanillo del anillo anteriormente citado.

1 Funciones reales de variable real

1.1. $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ va a representar el conjunto de todas las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

Ejemplos:

- Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 1/x$ entonces $f \notin \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ pues f no es aplicación, ya que no existe $f(0)$.
- Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = 1 \quad \text{si} \quad x \geqslant 0$$
$$f(x) = -1 \quad \text{si} \quad x < 0$$

entonces $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1.2. Se puede considerar una función como una máquina en la que se distingue una entrada y una salida, para cada número real que se introduce en la entrada la función produce un único número real en la salida.

Los elementos que entran forman el *dominio*. Los elementos que salen forman el *recorrido* o *conjunto imagen*.

Ejemplo:

- Sea la función $f : A \to B$, definida por $f(x) = x + 2$, donde

$$A = \{1, 3, 5, 7\}$$
$$B = \{3, 5, 6, 7, 9, 14, 15, 21, 22, 30\}$$

En este caso $f \notin \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ y en cambio $f \in \mathcal{F}(A, B)$, donde $\mathcal{F}(A, B)$ es el conjunto de todas las aplicaciones de A en B.

1.3. Consideremos ahora la función $g : A \to B$ definida por $g(x) = 3x$ donde $A = \{1, 3, 5, 7\}$ y $B = \{3, 5, 6, 7, 9, 14, 15, 21, 22, 30\}$; en este caso el recorrido de g es $\{3, 9, 15, 21\}$, y los elementos de este conjunto imagen son precisamente los que aparecen en la salida cuando se considera la función g como una máquina.

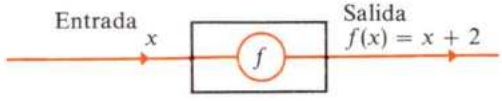
Ejercicios

1. De las siguientes correspondencias de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, indica cuáles pertenecen a $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to x - 1$

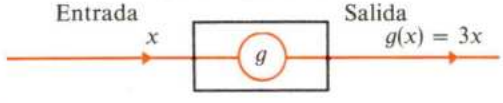
b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to x^2$

c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \to \dfrac{x+3}{x-1}$



Entrada x	Salida $f(x) = x + 2$
1	$f(1) = 1 + 2 = 3$
3	$f(3) = 3 + 2 = 5$
5	$f(5) = 5 + 2 = 7$
7	$f(7) = 7 + 2 = 9$

Conjunto inicial = Conjunto original =
= Dominio = $A = \{1, 3, 5, 7\}$
Conjunto final = Codominio = B
Recorrido = Conjunto imagen =
= $f(A) = \{3, 5, 7, 9\}$



Entrada x	Salida $g(x) = 3x$
1	$g(1) = 3 \cdot 1 = 3$
3	$g(3) = 3 \cdot 3 = 9$
5	$g(5) = 3 \cdot 5 = 15$
7	$g(7) = 3 \cdot 7 = 21$

2 Adición de funciones

2.1. Consideremos ahora las funciones f y g de **1.2.** y **1.3.** respectivamente, que tienen el mismo dominio. A partir de f y g podemos construir una nueva función que asocie a cada elemento $x \in A$ el número

$$f(x) + g(x) = (x + 2) + 3x = 4x + 2$$

Esta función es la suma de f y g y se designa por $f + g$,

$$(f + g)(x) = 4x + 2$$

Al margen se observa cómo actúa la función $f + g$.

2.2. Sean ahora $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$; se define la suma $f + g$ del modo siguiente $f + g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Como $f(x), g(x) \in \mathbb{R}$, se sigue que $f(x) + g(x) \in \mathbb{R}$
y, por tanto, $f + g$ es una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, es decir:

$$f + g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

Se ha definido así una operación interna en $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

La adición de dos funciones reales de variable real es otra función real de variable real.

Ejemplos:

- Sean las funciones

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{dada por:} \quad f(x) = x - 1$$
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{dada por:} \quad g(x) = 3x + 2$$

entonces

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = (x - 1) + (3x + 2) = 4x + 1$$

es decir: $f + g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \to 4x + 1$

- Considérense las funciones f y g

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad ; \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

definidas por $f(x) = x^2$ y $g(x) = 3x^3 - 6x$; entonces la función $f + g$ viene definida del modo siguiente:

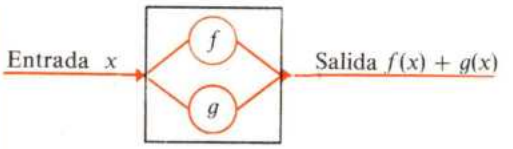
$$f + g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (f + g)(x) = 3x^3 + x^2 - 6x$$

- Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por: $g(x) = x^2 - 1$ entonces $f + g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definida por:

$$(f + g)(x) = \begin{cases} x^2 + x - 1 & \text{si} \quad x \geq 0 \\ x^2 - 1 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$



Entrada x	Salida $f(x) + g(x) = 4x + 2$
1	$f(1) + g(1) = 3 + 3 = 6$
3	$f(3) + g(3) = 5 + 9 = 14$
5	$f(5) + g(5) = 7 + 15 = 22$
7	$f(7) + g(7) = 9 + 21 = 30$

$f = \{(1, 3), (3, 5), (5, 7), (7, 9)\}$
$g = \{(1, 3), (3, 9), (5, 15), (7, 21)\}$
$f + g = \{(1, 6), (3, 14), (5, 22), (7, 30)\}$

2. Suma las funciones

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \to x^2 - 1$$
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \to x + 3/2$$

3. Suma las funciones

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \to x^2 - 1$$
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \to x^2 + 1$$

4. Sean las funciones

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \to x + 1$$
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \to x^2 + 6$$
$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \to 3x^4 + 5$$

Comprueba que se tiene

$$f + (g + h) = (f + g) + h$$

5. Con las funciones f y g del ejercicio 3, comprueba que $f + g = g + f$.

6. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si} \quad x > 3 \\ 6 & \text{si} \quad x \leq 3 \end{cases}$$

y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definida por

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 5 \\ 0 & \text{si} \quad x \leq 5 \end{cases}$$

Halla $g + f$ y comprueba que $g + f = f + g$.

3 Propiedades de la adición de funciones

La adición de funciones tiene las siguientes propiedades:

3.1. *Asociativa:*

$$\forall f, g, h \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}): \ (f + g) + h = f + (g + h)$$

3.2. *Conmutativa:*

$$\forall f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}): \ f + g = g + f$$

3.3. *Existe elemento neutro* que es la función $\mathbf{0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que lleva todo $x \in \mathbb{R}$ al 0, es decir, $\mathbf{0}(x) = 0$; $\forall x \in \mathbb{R}$.

3.4. *Todo elemento tiene opuesto*, en efecto si $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, entonces la función $-f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $(-f)(x) = -(f(x))$, es la opuesta de f.

Ejemplos:

- Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = 1 - x^2$, entonces $-f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ viene dada por

$$(-f)(x) = -(f(x)) = -(1 - x^2) = -1 + x^2$$

- Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x > 0 \\ 3x^2 + x & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{cases}$$

entonces $-f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ viene dada por:

$$-f(x) = -(f(x)) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ -3x^2 - x & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{cases}$$

3.5. Demostremos la propiedad conmutativa.

Tenemos que probar que $f + g = g + f$; $g + f$ y $f + g$ son funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, luego para ver que son iguales, como tienen el mismo dominio y recorrido, basta ver que actúan igual sobre todos los elementos de $\mathbb{R}$;

sea $x \in \mathbb{R}$, entonces

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \overset{①}{=} g(x) + f(x) = (g + f)(x)$$

En ① hemos aplicado el hecho de que $f(x), g(x) \in \mathbb{R}$ y que la suma de números reales es conmutativa.

7. Demuestra las propiedades **3.1.** y **3.3.** del epígrafe **3.**

8. Encuentra el opuesto de las siguientes funciones:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \to -x^2 + 3$$

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \to \begin{cases} 3x + \sqrt{x^2 + 6} & \text{si} \quad x < 0 \\ 3 + 6x^2 + x & \text{si} \quad x \geqslant 0 \end{cases}$$

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \to \frac{x - 1}{6x^2 + 1}$$

9. Sean las funciones

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \to x^4 + 2$$

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \to x^6 - 1$$

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \to x^2 + 4$$

Calcula

$$f + g + h, \qquad -(f + g + h)$$

y comprueba que

$$-(f + g + h) = (-f) + (-g) + (-h)$$

3.6. Demostremos que $-f$ es el elemento opuesto de f.

Tenemos que probar que $f + (-f) = \mathbf{0}$. Sea $x \in \mathbb{R}$, entonces $(f + (-f))(x) = f(x) + (-f)(x) = f(x) + (-f(x)) = 0 = \mathbf{0}(x)$ por lo tanto, $f + (-f) = \mathbf{0}$.

4 Sustracción de funciones

Dadas dos funciones $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ se define su *diferencia* del modo siguiente:

$$f - g = f + (-g)$$

Ejemplo:

- Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por: $f(x) = x^2 - 6x + 1$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ -x + 2 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

entonces $-g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ viene dada por:

$$(-g)(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ x - 2 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

luego $f - g$ viene definida por:

$$(f - g)(x) = \begin{cases} x^2 - 6x & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ x^2 - 5x - 1 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

10. Considera las funciones

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

definidas como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ 2 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Calcula $f + g$ y $f - g$.

11. Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 3/2 & x \geqslant 0 \end{cases}$$

y $h = \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por: $h(x) = 6x - 2$.

Encuentra una función $g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tal que $f + g = h$.

5 El grupo $(\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}), +)$ de las funciones $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$

En el siguiente cuadro se resumen las propiedades de la adición de funciones reales de variable real que permiten afirmar que $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +)$ es un grupo abeliano llamado grupo de las funciones reales de variable real.

$f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ $g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ $h \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$	**CONJUNTO:** $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ OPERACION DEFINIDA. ADICION (+)	Grupo / Grupo Abeliano
Asociativa	$f + (g + h) = (f + g) + h$	
Elemento neutro 0	$f + \mathbf{0} = \mathbf{0} + f = f$	
Elemento opuesto de f es $-f$	$f + (-f) = \mathbf{0}$	
Conmutativa	$f + g = g + f$	

$(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +)$ es un «grupo abeliano»

6 Multiplicación de funciones

6.1. Sean $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, se define el *producto de* f y g y se escribe fg, del modo siguiente:

$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

Como $f(x), g(x) \in \mathbb{R}$, entonces $f(x)g(x) \in \mathbb{R}$; luego fg es una aplicación de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ y, por tanto, $fg \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Ejemplos:

- Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1/(x^2 + 1)$ y sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = 6x$; entonces $gf : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está dada por

$$(gf)(x) = g(x)f(x) = \frac{6x}{x^2 + 1}$$

- Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 - 3$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = 3x^3 + 2x - 1$; entonces $gf : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está dada por:

$$(gf)(x) = g(x)f(x) = (3x^3 + 2x - 1)(x^2 - 3) =$$
$$= 3x^5 - 9x^3 + 2x^3 - 6x - x^2 + 3 = 3x^5 - 7x^3 - x^2 - 6x + 3$$

- Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si} \quad x \geqslant 1 \\ 6 & \text{si} \quad x < 1 \end{cases}$$

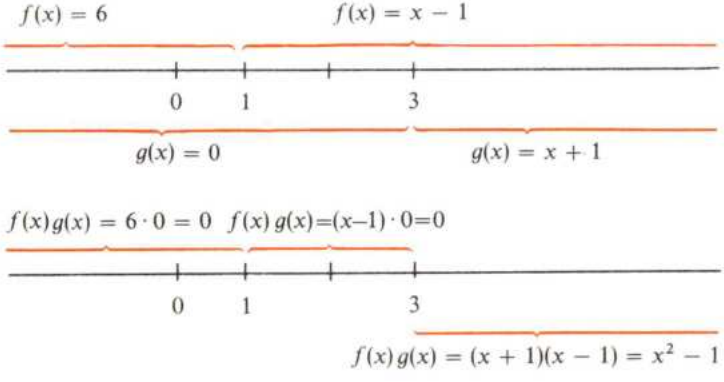
y sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$g(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si} \quad x > 3 \\ 0 & \text{si} \quad x \leqslant 3 \end{cases}$$

entonces $gf : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ viene definida por

$$(gf)(x) = g(x)f(x) = \begin{cases} 0 \cdot 6 = 0 & \text{si } x < 1 \\ 0(x - 1) = 0 & \text{si } 1 \leqslant x < 3 \\ (x + 1)(x - 1) = x^2 - 1 & \text{si } 3 \leqslant x \end{cases}$$

Las siguientes figuras aclaran cómo se ha procedido para multiplicar las funciones f y g:



12. Sean las funciones:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \to \sqrt{x^3 + 1}$$
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \to x^2 + 6$$

Halla fg y gf y comprueba que $fg = gf$.

13. Sean las funciones

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \to f(x) = x^2$$
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \to g(x) = 1 - x^2 + 3x$$
$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \to h(x) = 1/(6x^2 + 3)$$

Calcula $f(gh)$ y $(fg)h$ y comprueba que $f(gh) = (fg)h$.

14. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por: $f(x) = x^2 - 6$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ x - 3 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{cases}$$

Halla gf.

15. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{si} \quad x \leqslant 1 \\ 3x + 2x^2 & \text{si} \quad 1 < x \leqslant 3 \\ 4 & \text{si} \quad 3 < x \end{cases}$$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$g(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & \text{si} \quad x \leqslant 2 \\ 0 & \text{si} \quad 2 < x \end{cases}$$

Halla gf.

6.2. Consideremos ahora dos funciones f y g cuyo dominio es

$$C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

y cuyo codominio es $D = \{2, 4, 6, 8, 10, 4, 5, 7, 20, 36, 56, 80\}$

definidas por $f(x) = 2x$ y $g(x) = x + 3$

El conjunto de pares que definen ambas funciones es

$$f = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8), (5, 10)\}$$
$$g = \{(1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 7), (5, 8)\}$$

El producto gf viene definido por

$$gf(x) = 2x \cdot (x + 3) = 2x^2 + 6x$$

o también $gf = \{(1, 8), (2, 20), (3, 36), (4, 56), (5, 80)\}$;

se observa que $gf \notin \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ y que $gf \in \mathcal{F}(C, D)$.

16. Dadas las funciones f y g

$$f = \{(2, 6), (3, 9), (4, 12), (5, 15)\}$$

$$g = \{(2, 7), (3, 8), (4, 9), (5, 10)\}$$

¿Cuál es el dominio de ambas funciones?

¿Cuál es el recorrido?

Define mediante pares ordenados la función gf.

Define también dos conjuntos A y B de modo que $f \in \mathcal{F}(A, B)$; $g \in \mathcal{F}(A, B)$ y $fg \in \mathcal{F}(A, B)$

7 Propiedades de la multiplicación de funciones

El producto de funciones tiene las siguientes propiedades:

7.1. *Asociativa:* $\forall f, g, h \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$: $f(gh) = (fg)h$

ya que

$$(f(gh))(x) = f(x)[(gh)(x)] = f(x)g(x)h(x)$$
$$((fg)h)(x) = [(fg)(x)]h(x) = f(x)g(x)h(x)$$

Donde se ha tenido en cuenta la definición de producto de funciones y la propiedad asociativa de producto de números reales.

7.2. *Conmutativa:* $\forall f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$: $fg = gf$

En efecto $(fg)(x) \overset{①}{=} f(x)g(x) \overset{②}{=} g(x)f(x) \overset{③}{=} (gf)(x)$

En ① y ③ se ha aplicado la definición de producto y en ② la propiedad conmutativa del producto de números reales.

7.3. *Distributiva.*

La multiplicación es distributiva respecto de la adición

$$\forall f, g, h \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f\ (g + h) = fg + fh$$

7.4. *Existe elemento neutro.*

En efecto si $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la aplicación que lleva todo elemento de $\mathbb{R}$ al 1, se tiene $(fu)(x) = f(x)u(x) = f(x) \cdot 1 = f(x)$

es decir, $fu = f$

Del hecho de ser $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +)$ un grupo abeliano y de las propiedades del producto, vistas anteriormente, se sigue que $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \cdot)$ *es un anillo* que se llama «*anillo de las funciones reales de variable real*».

17. Demuestra o comprueba con un ejemplo la propiedad distributiva de **7.3.**

18. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por

$$f(x) = x - 9$$

y sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$g(x) = \frac{1}{6x^2 + 4}$$

Define la función: $fg - f^2$.

19. Comprueba las propiedades **7.1** y **7.2** con las funciones

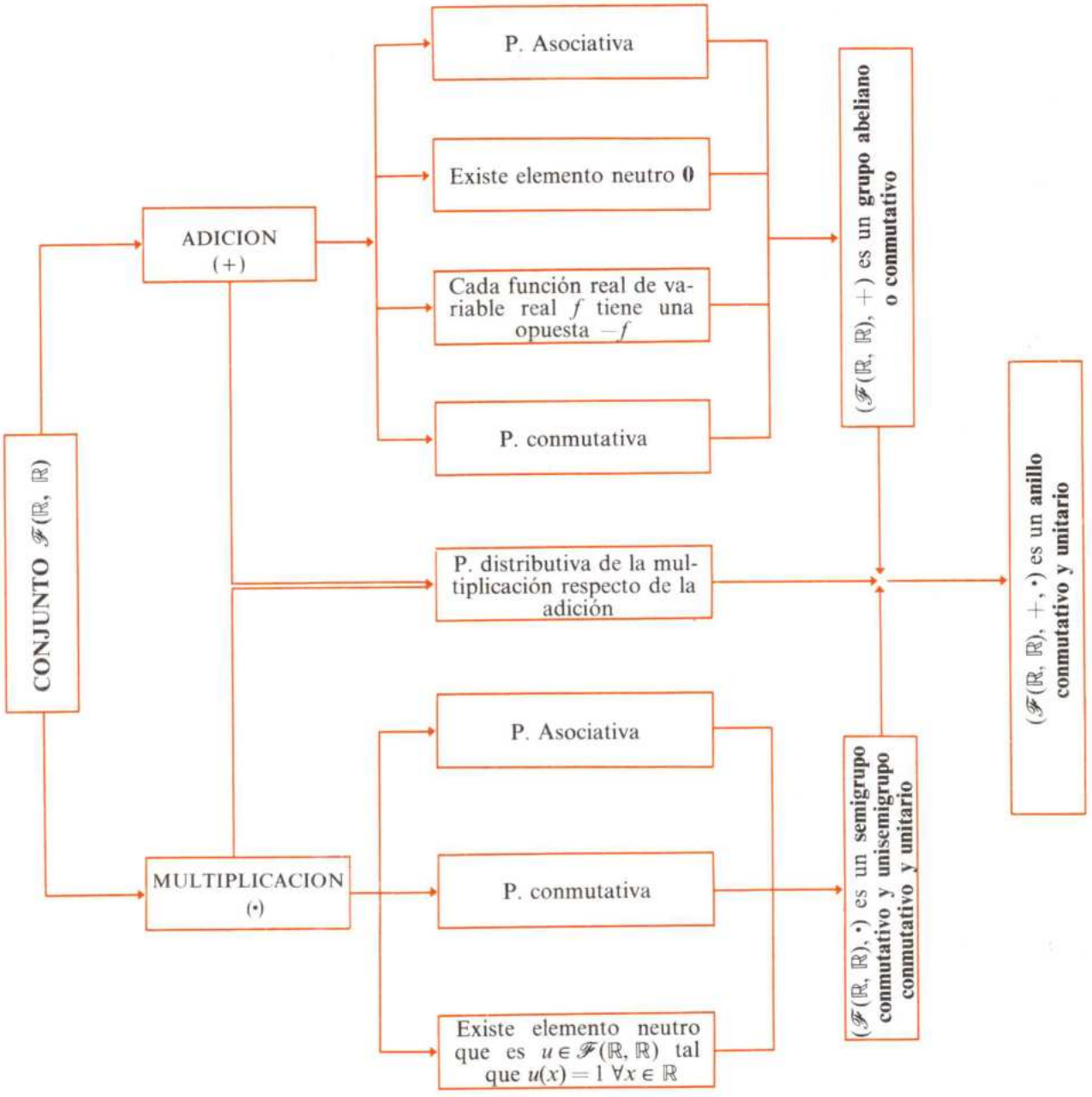
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to x - 1$$

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to x^2 + 3$$

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to 2x$$

8 El anillo $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \cdot)$

En el siguiente esquema se resumen las propiedades de la adición y multiplicación definidas en $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, que hacen de $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \cdot)$ un *anillo conmutativo y unitario*, llamado el «*anillo de las funciones reales de variable real*».



8.1. *Teorema:*

Si $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, entonces f tiene inverso para el producto si y sólo si $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq 0$.

Si f tiene inverso, sea este g, entonces $gf = u$

luego $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x)f(x) = u(x) = 1$

luego $f(x) \neq 0$.

Recíprocamente, si $f(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, definiendo $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ del modo siguiente:

$$g(x) = \frac{1}{f(x)} \in \mathbb{R},$$

se tiene que $gf = u$.

20. De las siguientes funciones, indica cuáles tienen inverso en $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to x^2 + 6$

b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to \dfrac{x - 1}{2}$

21. Pon un ejemplo de dos funciones f, g, $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ que posean inverso en $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ y comprueba que $(fg)^{-1} = g^{-1} \cdot f^{-1}$.

9 Funciones polinómicas

Una función $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ se dice *polinómica*, si existe un polinomio $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in \mathbb{R}[x]$ tal que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n,$$

es decir, tal que el valor de la función en x es el valor numérico del polinomio en x.

Así, la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 - 1$, es una función polinómica, pues viene definida por el polinomio $x^2 - 1$.

Nota: Obsérvese que como resultado del teorema anterior $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \cdot)$ no es un cuerpo, pues por ejemplo, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x - 1$ no posee inverso ya que $f(1) = 1 - 1 = 0$.

9.1. *Teorema:*

La suma de dos funciones polinómicas es una función polinómica.

En efecto si

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$$

y

$$g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m,$$

entonces

$$\begin{aligned}(f + g)(x) = f(x) + g(x) &= (a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) + \\ &+ (b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m) = (a_0 + b_0) + \\ &+ (a_1 + b_1)x + \ldots + (a_n + b_n)x^n + \ldots + b_mx^m\end{aligned}$$

que es una función polinómica.

22. Indica cuáles de las siguientes funciones son polinómicas:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to \dfrac{1}{x^2 + 1}$

b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to x^2 + 4 - 1$

c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to 6x^2 - 3x + 4$

d) $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to \dfrac{3x - 1}{2x^2 + 6}$

e) $l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to x^6 - 2x + 1$

9.2. *Teorema:*

El producto de dos funciones polinómicas es una función polinómica.

La demostración es análoga a la del teorema relativo a la suma.

Se tiene así que la suma y el producto son operaciones internas en el conjunto de las funciones polinómicas $\mathscr{P}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Como las operaciones definidas en $\mathscr{P}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ son las mismas que las definidad en $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ resulta que, la adición y multiplicación de funciones polinómicas son asociativas y conmutativas; por la misma razón la multiplicación es distributiva respecto a la adición; además la función cero:

$$\mathbf{0} = 0x + 0x^2 + 0x^3 + \cdots,$$

es una función polinómica.

Finalmente, dada la función polinómica

$$f = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n,$$

la función $-f = -a_0 - a_1x - a_2x^2 - \cdots - a_nx^n$ es también polinómica. Por lo tanto, el conjunto $\mathscr{P}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, con las operaciones definidas, tiene *estructura de anillo* que se llama «*anillo de las funciones polinómicas reales*».

Por ser $\mathscr{P}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subset \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, se dice que $(\mathscr{P}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \cdot)$ es un *subanillo* de $(\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \cdot)$.

Ejemplo:

- Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 + 6$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = 6x + 1$, entonces f y g son polinómicas ya que vienen definidas por los polinomios $x^2 + 6$ y $6x + 1$; su suma $f + g$ es la función $f + g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 + 6x + 7$, es decir que $f + g$ es una función polinómica que viene definida por el polinomio $x^2 + 6x + 7$.

Finalmente, del hecho de que f tiene inverso si y sólo si $\forall x \in \mathbb{R} f(x) \neq 0$ y del hecho de que las funciones polinómicas vienen representadas por polinomios, se sigue que:

9.3. *Teorema:*

Una función polinómica tiene inversa en $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ si y sólo si no posee raíces el polinomio que la representa.

Ejemplo:

- Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 + 1$, como $x^2 + 1$ no tiene raíces, entonces f posee inversa en $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, que es la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = 1/(x^2 + 1)$.

Nota: Obsérvese que $g \notin \mathscr{P}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ es decir, que g no es el inverso de f en $\mathscr{P}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sino que lo es en $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

23. La función $\mathbf{0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $\mathbf{0}(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ ¿es polinómica?

24. Escribe la función opuesta de

$$f = -2 + 3x + 4x^2 - 8x^3$$

¿Es $-f$ una función polinómica?

25. Demuestra que la función unidad $u \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ es una función polinómica.

26. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por: $f(x) = x^3 - 2x$. ¿Es f una función polinómica? Escribe el polinomio que define la función $ff = f^2$.

27. Considera las funciones f y g siguientes:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = x - 3x - 2$
$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por: $g(x) = x - 4x - 13$

a) ¿Son polinómicas las funciones f y g?
b) Calcula $f + g$ y fg.
c) ¿Son polinómicas las funciones $f + g$ y fg?

28. La función f del ejercicio **27** no tiene inversa ya que $x_1 = 2$ y $x_2 = 1$ son raíces del polinomio $x^2 - 3x + 2$.

¿Tiene inversa la función g del mencionado ejercicio **27**? ¿Por qué?

29. Indica cuáles de las siguientes funciones polinómicas reales tiene inversa:

a) $f(x) = x^2 - 5x + 6$
b) $g(x) = x^2 - 6x + 10$
c) $h(x) = x^4 + 1$
d) $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$

30. Escribe las funciones inversas de las del ejercicio **29** que admitan inversa.

Ejercicios y cuestiones

31. Cuáles de las siguientes correspondencias de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ son elementos de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to \dfrac{x}{6x - 1}$

b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to \sqrt{3x^2 + 4}$

c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to \begin{cases} 1/x & \text{si } x > 1 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 1 \end{cases}$

d) $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to \begin{cases} 1/1 - x & \text{si } x < 5 \\ 0 & \text{si } x \geqslant 5 \end{cases}$

e) $l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < 1 \\ x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to \dfrac{3x}{x^2 + 1}$

32. Si $f, g, h \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ están dadas por

$$f(x) = x - 1, \quad g(x) = \frac{1}{x^2 + 6}$$

$$h(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x \geqslant 0 \\ x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Halla:

1) $(f + g) - h$; 2) $(f - h) + g$; 3) $f + h + g$; 4) $f - h - g$; 5) $(fh)g$

6) $f - (hg)$; 7) $f^2 - hg$; 8) $f^2 - h^2$ 9) $(f - h)(f + h)$

Compara 8) y 9).

33. Dada las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x < 0 \\ 6 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = x + 8$. Halla una función $h \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tal que $hf = g$.

34. Escribe tres funciones polinómicas f, g, h y calcula $f + g - h$.
¿Cuál es el polinomio que representa a esta función?

35. De las siguientes funciones indica cuáles son polinómicas:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to \dfrac{1}{x^2 + 1}$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to \begin{cases} 6x + 1 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to x^3 - 1$

$k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to 6x^5 - 4x^2 + 3$

36. Halla la inversa de la función polinómica representada por el polinomio $x^4 + 6x^2 + 9$

37. Si f es una función polinómica, ¿cómo tiene que ser el polinomio que la representa para que tenga inversa y su inversa sea polinómica?

38. ¿Cuál de los siguientes conjuntos $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ y $\mathscr{P}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ es subconjunto del otro?

39. ¿Tiene inversa una función polinómica que tiene dos raíces?

Tema 14

REPRESENTACION GRAFICA DE LAS FUNCIONES POLINOMICAS

Este tema está dedicado a la representación gráfica de las funciones polinómicas de grado menor o igual que 2.

Primeramente procederemos a introducir en el plano un sistema de coordenadas rectangulares lo que nos permitirá establecer una correspondencia biyectiva entre puntos del plano y pares de números (x, y); a continuación, utilizando esta biyección, encontraremos la gráfica de las funciones polinómicas citadas anteriormente.

1 Coordenadas cartesianas en el plano

Consideremos en el plano dos rectas perpendiculares r_1 y r_2, y sea O un punto de intersección, como indica la figura 1.

Se sabe que fijada una unidad de medida, los puntos de cada recta están en correspondencia con los números reales, entonces, dado un punto P del plano, trazando por P las perpendiculares a r_1 y r_2, se tienen dos puntos P_1 y P_2 sobre r_1 y r_2, respectivamente, que son los obtenidos como intersección de dichas perpendiculares con r_1 y r_2.

Tomando u como unidad de medida, a P_1 le corresponde un número real único, x, y a P_2 otro, y; entonces asociamos a P el par de números reales (x, y).

Estos números se llaman las *coordenadas cartesianas de P* respecto a r_1 y r_2.

x, se llama la *primera coordenada de P* o *abscisa*, e y, la *segunda coordenada* de P u *ordenada*.

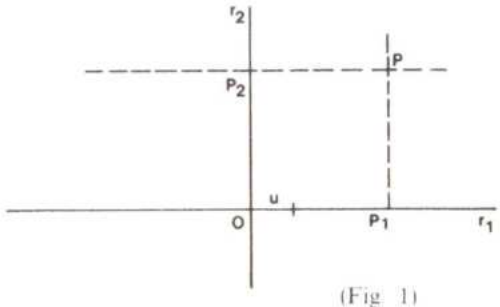
Recíprocamente, dado un par de números reales (x, y), quedan determinados dos puntos únicos P_1 y P_2 sobre r_1 y r_2, respectivamente; trazando por ellos paralelas a r_2 y r_1 se tiene un único punto P como intersección de dichas rectas.

Es evidente que las coordenadas de P son (x, y).

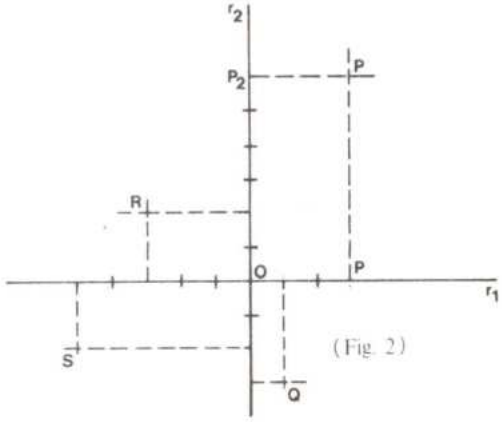
Hemos obtenido así una correspondencia biyectiva entre puntos del plano y pares ordenados de números reales.

Un par de rectas como r_1 y r_2, junto con una unidad de medida sobre ellas, se llama un *sistema de ejes coordenados rectangulares en el plano.*

El punto O de intersección de r_1 y r_2 se llama el *origen de coordenadas.*



(Fig. 1)



(Fig. 2)

Las coordenadas de P son (3, 6) las de $Q(1, -3)$, las de $R(-3, 2)$ y las de $S(-5, -2)$.

1. Dibuja en el plano un sistema de ejes coordenados rectangulares y representa los siguientes puntos:

   $P(-1, 0)$, $Q(0, 1)$ $T(1, 1)$
   $R(-2, -3)$, $S(-1, 3)$

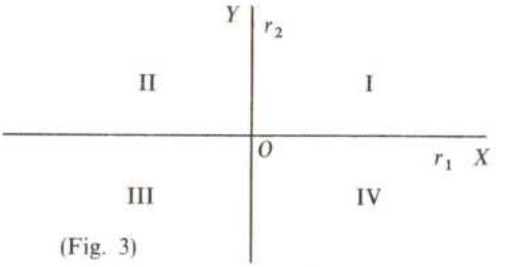
Como se ve en la figura 3, un sistema de ejes rectangulares divide al plano en cuatro regiones que se llaman *cuadrantes* I, II, III y IV (*primero, segundo, tercero y cuarto cuadrantes*, respectivamente).

Se ve fácilmente que un punto P de coordenadas (x, y) es tal que

$$P \in \begin{cases} \text{I cuadrante} \\ \text{II cuadrante} \\ \text{III cuadrante} \\ \text{IV cuadrante} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0,\ y \geqslant 0 \\ x \leqslant 0,\ y \geqslant 0 \\ x \leqslant 0,\ y \leqslant 0 \\ x \geqslant 0,\ y \leqslant 0 \end{cases}$$

Además, un punto $P \in r_1$ *si y sólo sí su segunda coordenada es* 0, es decir, si sus coordenadas son de la forma $(x, 0)$ y análogamente el punto $P \in r_2$ *si y sólo sí su primera coordenada es* 0, es decir, si sus coordenada son de la forma $(0, y)$.

La recta r_1 se suele llamar *eje X* y la r_2 *eje Y*.



(Fig. 3)

2. De los siguientes puntos indica, sin representarlos gráficamente, en qué cuadrante se encuentran: $R(0, -1)$, $S(-1, -1)$ $P(-1, 1)$, $Q(0, 0)$ $T(2, -3)$

3. Representa gráficamente los puntos $(-1, 0)$, $(1, 1)$, $(2, -1)$, $(0, 1)$ e indica en qué cuadrante se hallan. Si hay alguno sobre el eje X o el Y indícalo.

2 Representación gráfica de una función

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, una función; a cada $x \in \mathbb{R}$ le corresponde un único número real $y = f(x)$, que es su imagen por f; se tiene así para cada $x \in \mathbb{R}$ un par de números reales $(x, f(x))$ que, como hemos visto en el párrafo anterior, determina un punto en el plano.

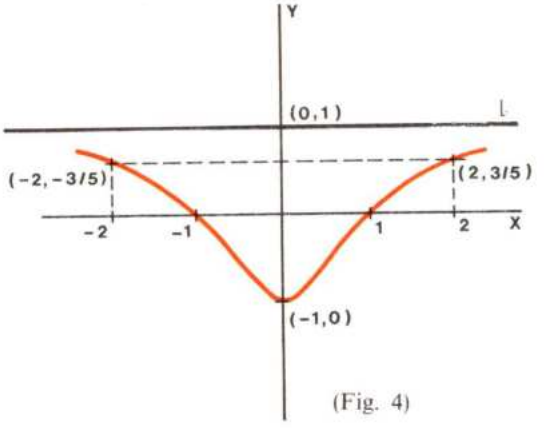
El conjunto de todos los puntos $(x, f(x))$ determina en el plano una curva que se llama la *gráfica* de f respecto a los ejes dados. Para el estudio de la gráfica de una función f es a veces conveniente construir una *tabla de valores de* f consistente en elegir algunos valores de x y las correspondientes $y = f(x)$; frecuentemente el conocimiento de algunos valores particulares da idea de la gráfica de f; evidentemente cuanto mayor sea el número de valores que se consideren en la tabla, más información se tendrá sobre la gráfica de f.

- Sea $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$. Al margen se ha formado una tabla de valores de esta función y se ha representado en la figura 4. Se observa que para valores opuestos de la x, los valores de la y coinciden; esto quiere decir que si (a, b) pertenece a la curva, entonces $(-a, b)$ pertenece también.

  Como para todo x es $x^2 - 1 < x^2 + 1$ entonces $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1} < 1$, de aquí que los puntos de la curva no pasan de la recta L.

$f(x) = y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ la tabla de f es

x	-1	-2	0	2
y	0	$\frac{3}{5}$	-1	$\frac{3}{5}$



(Fig. 4)

3 Simetrias de una función $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

3.1. Sea $y = f(x)$ una función real de variable real; se dice que f es *simétrica respecto al eje OY* si $\forall x \in \mathbb{R}$ se verifica:

$$f(x) = f(-x).$$

También se dice que f es una función par; esto quiere decir que si el punto $(x, f(x))$ pertenece a la gráfica de f, entonces el punto $(-x, f(-x))$ pertenece también a dicha gráfica.

Así en la figura 6 se verifica:

$$f(-x_0) = f(x_0)$$
$$f(-x_1) = f(x_1)$$
$$f(-x_2) = f(x_2)$$

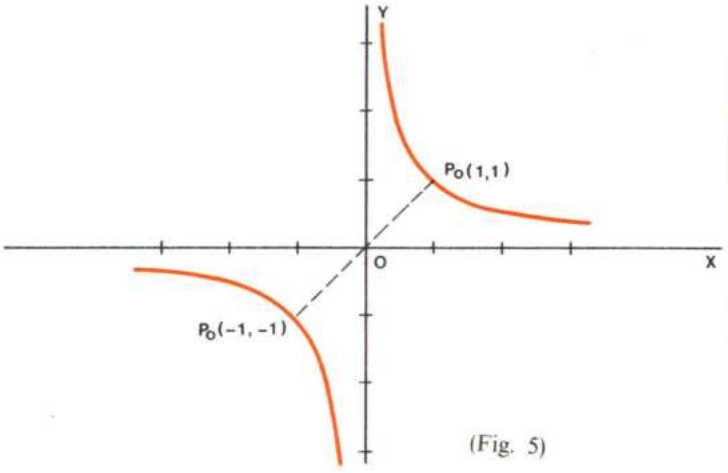
3.2. Una función $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ se dice que es *simétrica respecto del origen* si $\forall x \in \mathbb{R} f(-x) = -f(x)$ también se dice que f es una función impar; esto quiere decir que si el punto (x, y) está en la gráfica de f entonces, su simétrico respecto del origen, el punto $(-x, -y)$ está también en la gráfica de f.

Gráficamente esto quiere decir, que si un punto está en la gráfica, el diametralmente opuesto respecto al origen de coordenadas, está también en la gráfica.

Ejemplo:

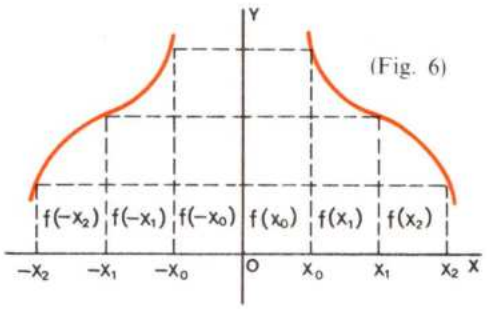
- Sea la función: $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = y = \dfrac{1}{x}$

  Su gráfica es la siguiente:



(Fig. 5)

La gráfica de esta función es simétrica respecto del origen, pues si $(x, y) \in f$ resulta que $(-x, -y) \in f$.



(Fig. 6)

4. De las siguientes funciones reales de variable real, indica cuáles son simétricas respecto al eje Y.

a) $f(x) = x^2$

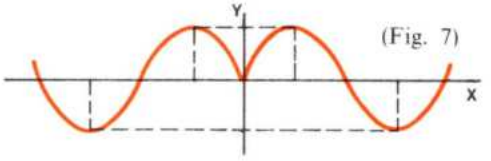
b) $f(x) = x^2 - 3x$

c) $f(x) = \dfrac{x^5 + 4}{x^2 + 1}$

d) $f(x) = 7$

e) $f(x) = \sqrt{x^2 + 6}$

5. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función cuya gráfica es:



(Fig. 7)

¿Es simétrica respecto al eje Y?

6. Si una función f es simétrica respecto al eje Y y si $f(5) = -1$. ¿Cuánto vale $f(-5)$?

7. De las siguientes funciones indica cuáles son simétricas respecto el origen

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 + 1}$

c) $f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$

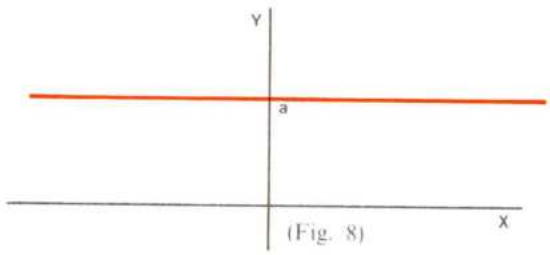
d) $f(x) = 1 - x^2$

e) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x > 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$

4 Gráfica de las funciones polinómicas de grado cero

4.1. Una función polinómica de grado cero es una función polinómica que viene definida por un polinomio de grado cero, es decir, por una constante; serán de la forma $y = f(x) = a$. Formando la tabla de valores de f se tiene la siguiente gráfica:

x	y
-3	a
-2	a
-1	a
0	a
1	a
2	a
$\vdots$	$\vdots$



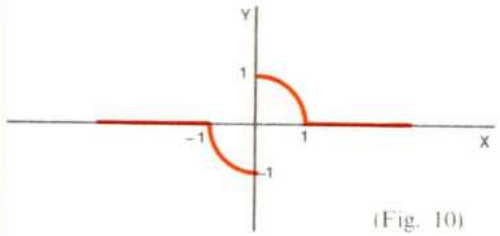
(Fig. 8)

Como se ve se trata de una recta paralela al eje X a una distancia a.

En particular, si $a = 0$, se tiene el propio eje X.

Evidentemente $f(-x) = a = f(x)$ luego f es simétrica respecto al eje Y.

8. La gráfica de una función f está dada por



(Fig. 10)

es decir

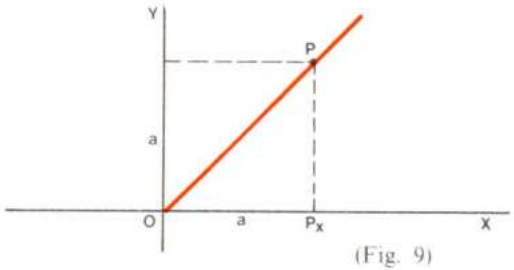
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x > 1 \\ \sqrt{1 - x^2} & \text{si} \quad 0 < x \leqslant 1 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ -\sqrt{1 - x^2} & \text{si} \quad -1 \leqslant x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < -1 \end{cases}$$

¿Es simétrica respecto al origen?

5 Gráfica de las funciones polinómicas del grado uno

5.1. Consideremos primeramente la función $y = f(x) = x$ su tabla es

x	y
-2	-2
-1	-1
0	0
$1/2$	$1/2$
5	5

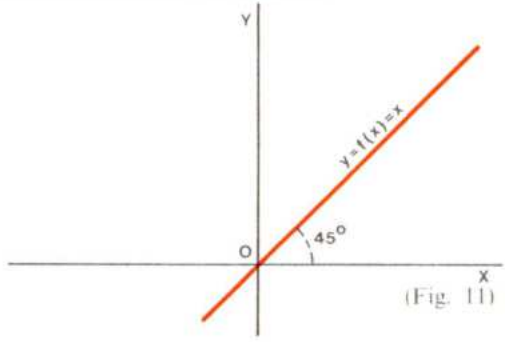


(Fig. 9)

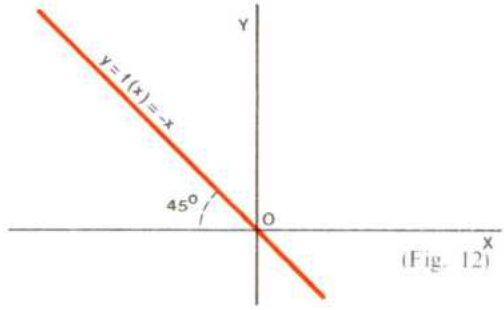
Evidentemente el origen pertenece a la gráfica, además; si P pertenece a la gráfica, es de coordenadas (a, a), y por tanto, dado que el triángulo $OP_x P$ es rectángulo tiene dos lados iguales; OX forma con OY un ángulo de 90°, de aquí que todos los puntos P están alineados, y se trata de una recta que forma un ángulo de 45° con el eje OX.

Como la función $f(x) = x$ es simétrica respecto al origen, pues $f(-x) = -x = -f(x)$, se sigue que su gráfica es la de la figura 11.

El alumno puede comprobar como ejercicio que la gráfica de $y = f(x) = -x$ es la indicada en la figura 12.



(Fig. 11)



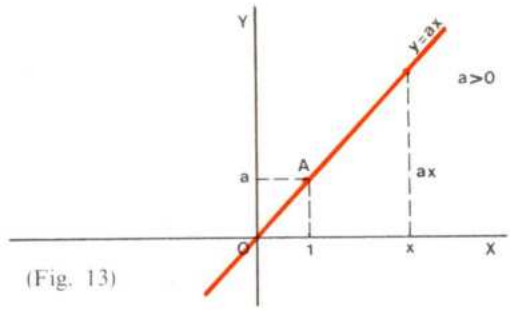
(Fig. 12)

5.2. Consideremos ahora la función $y = f(x) = ax$, que se llama *la función lineal.*

Supondremos que $a > 0$ (el caso $a < 0$ se puede hacer como ejercicio).

Evidentemente el punto $(1, a)$ está en la gráfica de la función. Si x es arbitrario, por el teorema de Tales, aplicado a la figura 13, resulta: $\frac{y}{x} = \frac{a}{1}$, es decir $y = ax$.

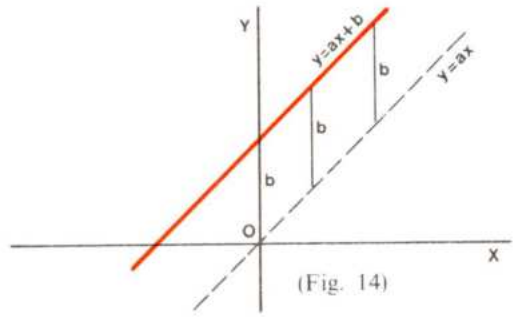
Se observa que los puntos de la gráfica de $y = ax$ deben ser los de la recta que pasa por los puntos O y A $(1, a)$, de aquí que, como es simétrica respecto al origen la gráfica de la función lineal $y = ax$, es la indicada en la figura 13.



(Fig. 13)

5.3. Vamos ahora a estudiar la función polinómica más general de grado uno: ésta vendrá dada por un polinomio de grado uno, es decir, $f(x) = y = ax + b$; se llama también *función afín.*

Se observa que para cada x, y es la suma de ax (valor de la función lineal en x) y de la constante b; se obtiene como indica la figura 14 la gráfica de la función afín.



(Fig. 14)

9. Representa las funciones

a) $f(x) = ax$ $\qquad a > 0$

b) $f(x) = ax + b$, $\quad b > 0$, $\quad a > 0$

10. Representa gráficamente las funciones

a) $y = f(x) = -3x + 5$

b) $y = f(x) = 1/6x - 8$

6 Gráfica de las funciones afines a intervalos

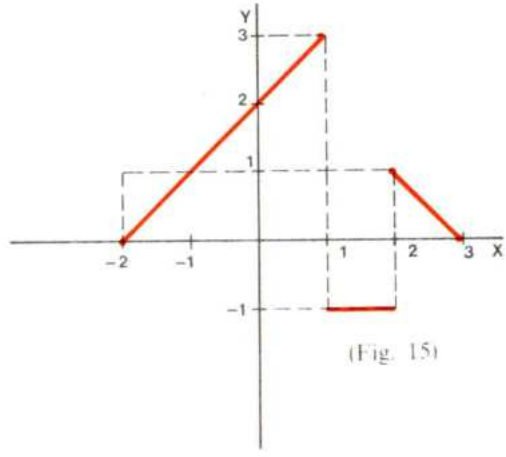
6.1. Consideremos la función f de $[-2, 3]$ en $\mathbb{R}$ definida del modo siguiente: $f : [-2, 3] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 \text{ si } -2 < x < 1 \\ -1 \text{ si } 1 < x < 2 \\ -x + 3 \text{ si } 2 < x < 3 \end{cases}$$

$$f(-2) = 1; \quad f(1) = 3; \quad f(2) = 1/2; \quad f(3) = 0$$

Su representación gráfica aparece en la figura 15. La función f es una *función afín a intervalos.*

Definición: *Una función f de $[a, b]$ en $\mathbb{R}$ se dice que es una función afín a intervalos cuando $[a, b]$ está descompuesto en un número finito de intervalos abiertos y en cada uno de ellos, f, coincide con una función afín. Además se dan las imágenes de los extremos de dichos intervalos abiertos.*



(Fig. 15)

6.2. *Funciones escalonadas.*

Sea ahora la función g de $[-2, 3]$ en $\mathbb{R}$
$g : [-2, 3] \to \mathbb{R}$ definida por

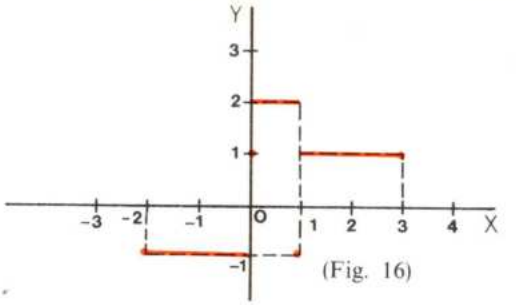
$$g(x) = \begin{cases} -1 \text{ si } -2 < x < 0 \\ 2 \text{ si } 0 < x < 1 \\ 1 \text{ si } 1 < x < 3 \end{cases}$$

$$g(-2) = -1; \quad g(0) = 1; \quad g(1) = -1; \quad g(3) = 1$$

esta función es también una función afín a intervalos, pero en cada uno de ellos g es constante.

La representación gráfica de g aparece en la figura 16 y se dice que es una función escalonada.

Definición: *Una función g de $[a, b]$ en $\mathbb{R}$ se dice que es una función escalonada cuando $[a, b]$ está descompuesto en un número finito de intervalos abiertos y en cada uno de ellos f es una función constante. Además se dan las imágenes de los extremos de dichos intervalos abiertos.*



(Fig. 16)

11. Haz la gráfica de la siguiente función escalonadas:

$$h(x) = \begin{cases} 3 & \text{si} & -2 < x < 0 \\ -1 & \text{si} & 0 < x < 1 \\ 2 & \text{si} & 1 < x < 3 \end{cases}$$

y si $h(-2) = 4$; $h(0) = 0$; $h(1) = 1$; $h(3) = 2$

7 Gráfica de la función polinómica de grado dos

Sea la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = x^2$, veamos cómo para un x dado se puede construir la ordenada $y = x^2$.

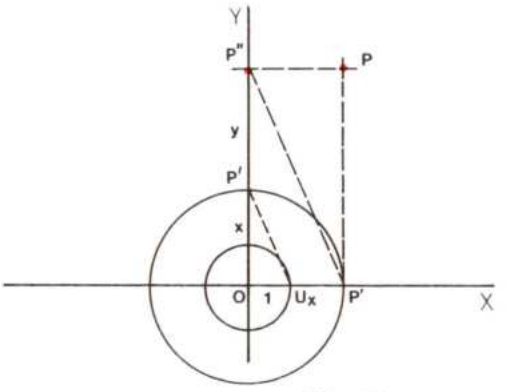
Construyamos la circunferencia de centro O y radio 1, como se indica en la figura 18, y análogamente la de centro O y radio x. Uniendo U con P' y trazando por P^* la paralela a UP' se obtiene el punto P''; este punto P'', de corte con OY, es tal que su ordenada verifica por el teorema de Tales:

$$\frac{y}{x} = \frac{x}{1}$$

es decir, $y = x^2$.

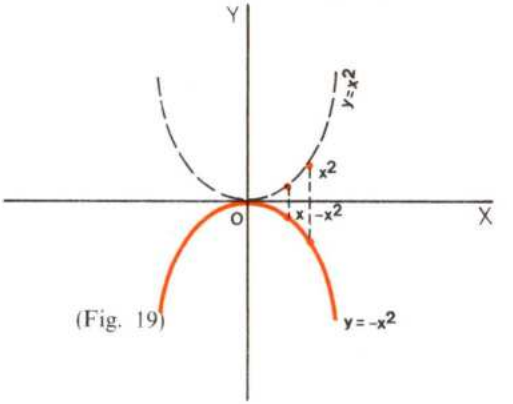
Entonces, el punto $P(x, f(x))$ es el indicado en la figura.

De esta manera podemos construir cualquier punto de la curva que resulta ser como la indicada en la figura 17.

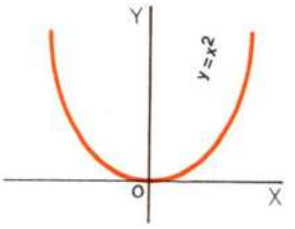


(Fig. 18)

7.2. La curva $y = -x^2$, tiene para cada valor de x, el mismo valor que la curva $y = x^2$, pero de signo contrario; luego su gráfica será la de la figura 19.



(Fig. 19)

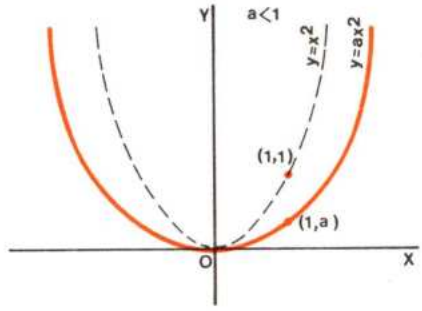


(Fig. 17)

7.3. Sea ahora $y = ax^2$ con $a > 0$. La tabla de valores es:

x	0	1	2 ...
y	0	a	$4a$...

Esta tabla nos hace ver que la función $y = ax^2 = (\sqrt{a} \cdot x)^2$ es de la misma forma que la ya estudiada $y = x^2$, pero los valores de y son menores si suponemos $a < 1$; es decir, la gráfica de $y = ax^2$, con $a < 1$ (figura 20), es del mismo tipo que la gráfica de $y = x^2$, pero más abierta.



(Fig. 20)

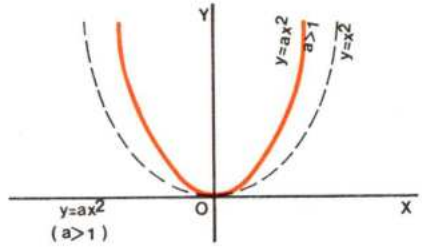
Si por el contrario $a > 1$, entonces los valores a, $4a$, etc... son mayores que 1, 4, ... luego la gráfica de $y = ax^2$ será del mismo tipo que la de $y = x^2$, pero más cerrada, como indica la figura 21.

7.4. La representación de $y = -ax^2$ es la misma que la de $y = ax^2$, pero reflejada sobre el eje X, como se ha visto con $y = -x^2$.

7.5. Consideremos ahora la función $y = f(x) = ax^2 + c$.

Se observa que el valor de y, para un cierto x, se obtiene añadiendo c al valor ax^2.

La representación gráfica de $y = ax^2 + c$ será entonces la de la figura 22.



(Fig. 21)

7.6. Por último, vamos a tratar de representar

$$y = ax^2 + bx + c,$$

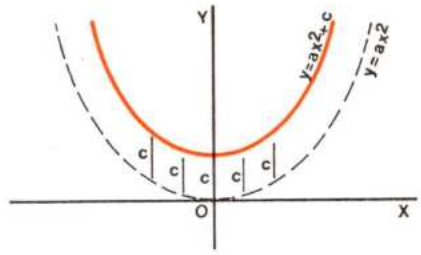
entonces se tiene:

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}\,x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2\,\frac{b}{2a}\,x + \frac{c}{a}\right) =$$
$$= a\left(x^2 + 2\,\frac{b}{2a}\,x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2}\right) =$$
$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{4ac - b^2}{4a^2}\right)\right]$$

Como $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geqslant 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R}$, resulta que:

Si $a > 0$, y toma el valor mínimo en el punto de abscisa $x = -\frac{b}{2a}$, ya que en este caso $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$

$$y = a\left(\frac{4ac - b^2}{4a^2}\right) = \frac{4ac - b^2}{4a}$$



(Fig. 22)

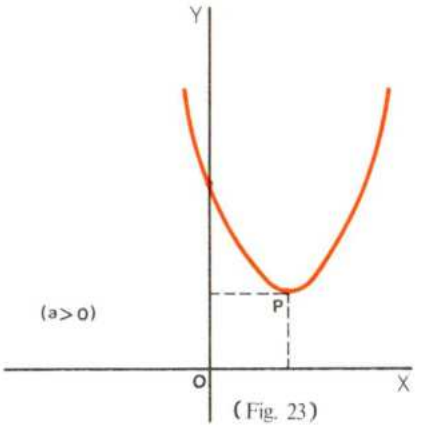
Si $a < 0$, y toma el valor máximo en el punto de la abscisa $x = \dfrac{-b}{2a}$ por la misma razón, luego la función $y = ax^2 + bx + c$ alcanza el valor máximo o mínimo en $P\left(-\dfrac{b}{2a}, \dfrac{4ac - b^2}{4a}\right)$

es decir en el punto $P\left(\dfrac{-b}{2a}, c - \dfrac{b^2}{4a}\right)$

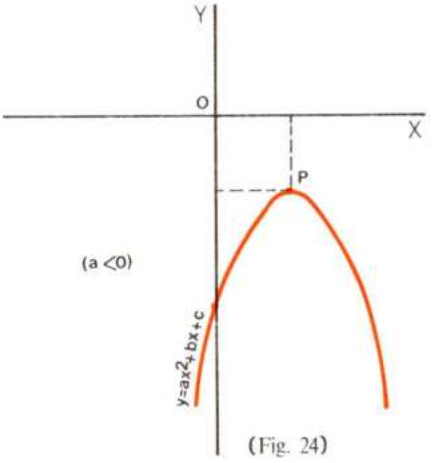
La representación de la función $y = ax^2 + bx + c$ viene dada en las figuras 23 y 24.

La curva correspondiente a la función polinómica de grado dos se llama *parábola*, y el punto P de coordenadas, determinado anteriormente.

$\left(-\dfrac{b}{2a}, c - \dfrac{b^2}{4a}\right)$ es el *vértice* de la parábola.



(Fig. 23)



(Fig. 24)

7.7. Si hacemos $h = \dfrac{-b}{2a}$ y $k = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$

la función polinómica de segundo grado se puede escribir

$$y = ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right] =$$

$$= a(x - h)^2 + k. \text{ El vértice es } V(h, k).$$

Si se trata de representar $y = ax + bx + c$, una forma de hallar el vértice consiste en escribir esta función en la forma

$$y = a(x - h)^2 + k$$

Ejemplo:

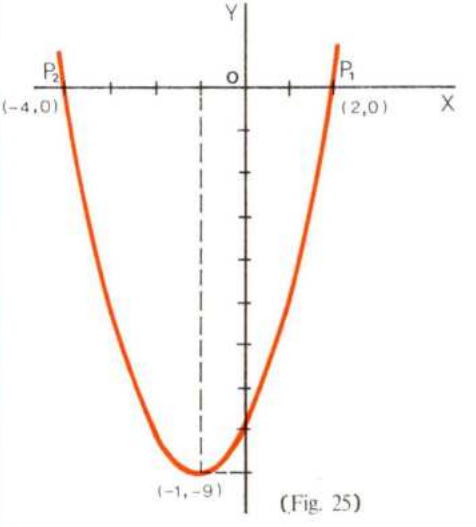
- Vamos a representar la función $y = x^2 + 2x - 8$. Para hallar el vértice escribimos

$$y = x^2 + 2x - 8 = \underbrace{x^2 + 2x + 1}_{(x+1)^2} - 1 - 8 = (x + 1)^2 - 9$$

$h = -1$, $k = -9$; el vértice es $V(-1, -9)$ (figura 25).

Los puntos de corte con el eje X se obtienen resolviendo el sistema $\begin{cases} x = 0 \\ x^2 + 2x - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -4 \end{cases}$

$P_1(2, 0)$, $P_2(-4, 0)$.



(Fig. 25)

Ejercicios y cuestiones

12. Representa las parábolas:

a) $y = -\frac{1}{2}x^2$

b) $y = 3x^2$

c) $y = 3x^2 - 5$

d) $y = -2x^2 + 7$

e) $y = 3x^2 - 6x + 1$

f) $y = 2x^2 + 3$

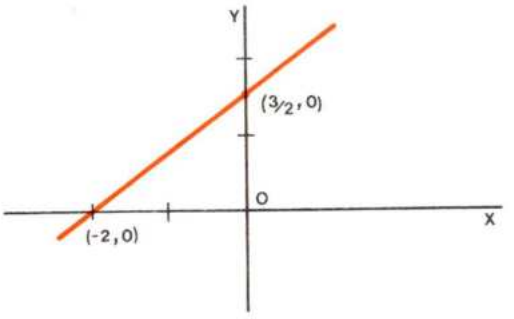
13. Halla el vértice de cada una de las parábolas del ejercicio **12**.

14. Una parábola tiene de vértice el punto (1, 1) y pasa por el punto (0, 2). Halla su ecuación.

Iguala las coordenadas del vértice $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ a las del vértice dado.

15. Representa la función $f(x) = ax + b$ sabiendo que $a < 0$ y $b < 0$.

16. Dada la gráfica de la figura



halla la función afín que representa.

17. Considera la función f de $[-1, 6]$ en $\mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } -1 < x < 2 \\ 1 & \text{si } 2 < x < 4 \\ 0 & \text{si } 4 < x < 6 \end{cases}$$

y $f(x) = 0$; $f(2) = 1$; $f(4) = 3$; $f(6) = 2$.

Representa esta función y di de qué tipo es.

18. Representa la función afín por intervalos h definida del modo siguiente:

$$h(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{si } -2 < x < 0 \\ 2x & \text{si } 0 < x < 2 \\ x - 1 & \text{si } 2 < x < 4 \end{cases}$$

y $h(-2) = 0$; $h(0) = 1$; $h(2) = 2$; $h(4) = 3$.

19. Escribe las coordenadas de dos puntos que sean simétricos respecto del eje OY.

20. De los siguientes puntos indica los que son simétricos respecto del origen:

a) $(-2, 3)$ y $(4, 1)$

b) $(-3, 3)$ y $(3, -5)$

c) $(3, 4)$ y $(-3, -4)$

d) $(a, -b)$ y $(-a, b)$

21. De los siguientes puntos indica los que son simétricos respecto del eje Y:

a) $(3, 4)$ y $(-3, 4)$

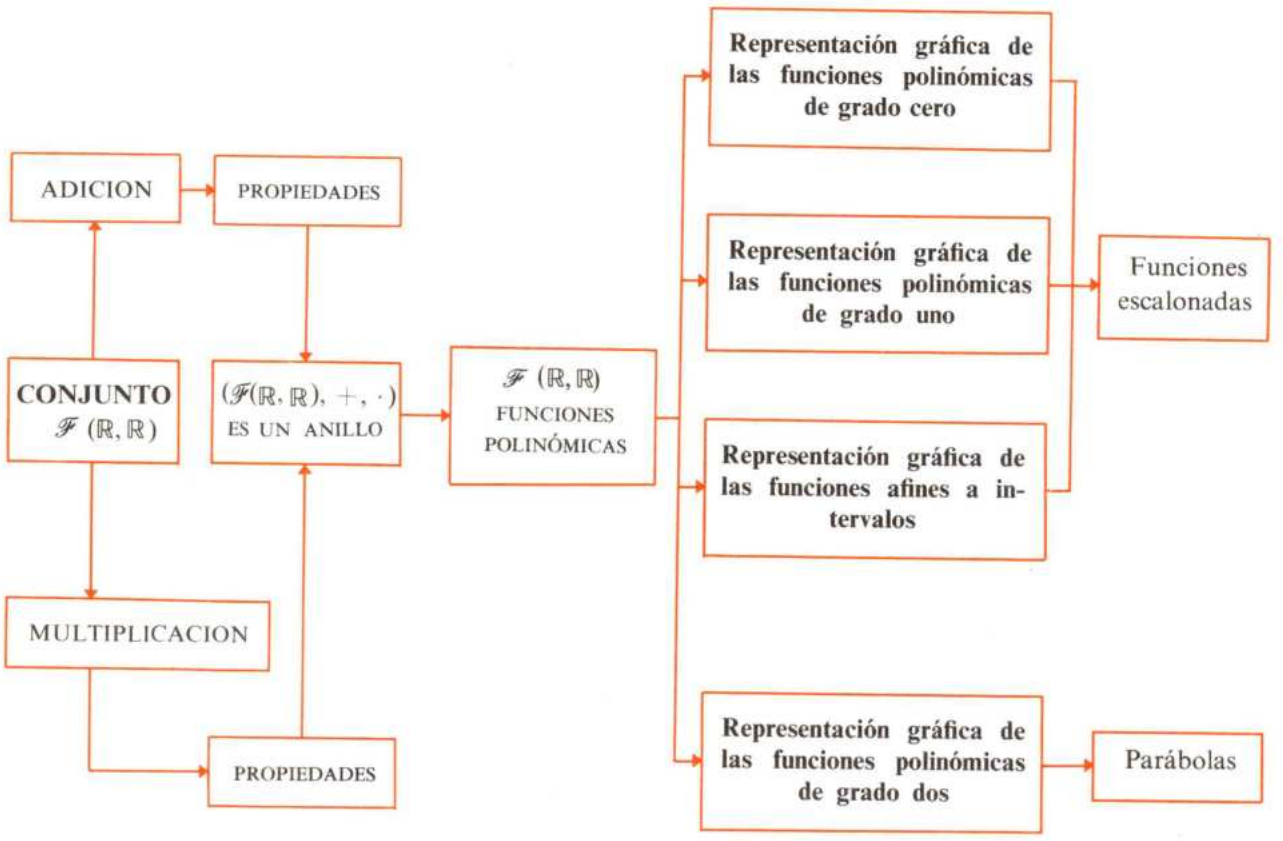
b) $(-3, 4)$ y $(3, 4)$

c) (a, c) y $(-a, c)$

d) $(5, 7)$ y $(5, -7)$

DIAGRAMA ESTRUCTURAL DE LA UNIDAD

FUNCIONES POLINOMICAS



Unidad 6

RESOLUCION DE ECUACIONES INECUACIONES Y SISTEMAS

Las ecuaciones y las inecuaciones, cuyo estudio se aborda en esta Unidad, se usan constantemente en la matemática.

La importancia de esta ciencia, se debe en gran medida a su aplicación a la resolución de problemas de todo tipo: problemas de la física, de la economía, etc. Estos problemas, se expresan con frecuencia mediante ecuaciones y la resolución de aquéllos queda subordinada a la de un problema matemático.

En el primer tema de esta Unidad se estudian las ecuaciones y sistemas de ecuaciones.

En el segundo, tema 16 se estudian las inecuaciones de una y dos incógnitas, así como su representación gráfica.

Tema 15

1. Igualdades.
2. Ecuación.
3. Resolución de la ecuación de 1.er grado con una incógnita.
4. Sistemas de ecuaciones lineales.
5. Método de reducción o de las combinaciones lineales.
6. Otros métodos de resolución de sistemas.
7. Sistemas no lineales.
8. Sistemas de dos ecuaciones de 2.° grado.

Tema 16

1. Desigualdades.
2. Propiedades de las desigualdades.
3. Inecuación.
4. Resolución de una inecuación.
5. Inecuación de 1.er grado con una incógnita.
6. Cálculo del conjunto que satisface más de una inecuación. Representación gráfica.
7. Inecuaciones $|x| \leqslant a$; $|x| \geqslant a$; $|cx + d| \leqslant a$.
8. Representación gráfica de la función $y = |x - a|$.
9. Inecuación de 1.er grado con dos incógnitas.
10. Representación de un sistema de inecuaciones de 1.er grado con dos incógnitas.
11. Resolución de la inecuación $ax^2 + bx + x > 0$.

Tema 15

ECUACIONES Y SISTEMAS DE ECUACIONES

En este tema abordaremos la resolución de ecuaciones de 1.º y 2.º grados con una incógnita, así como los sistemas lineales con dos incógnitas, y algunos tipos de sistemas no lineales. El método de resolución se basa en las propiedades de la igualdad y en las propiedades de las operaciones en $\mathbb{R}$.

Se ha incluido una discusión de los distintos casos que pueden presentarse en los tipos de ecuaciones y sistemas más sencillos.

Casi todos los ejemplos van acompañados de una representación gráfica.

1 Igualdades

1.1. Si a y b son dos letras que representan el mismo número se escribe $a = b$.

Así, si a es el número $2 + 3$ y b es el número 5, se escribe $a = b$ es decir, $2 + 3 = 5$.

Es inmediato probar que la igualdad verifica las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.

Si a y b representan objetos diferentes se escribe $a \neq b$.

1.2. Si a, a', b, b' son números reales se verifica:

$$\left.\begin{matrix} a = a' \\ b = b' \end{matrix}\right\} \Rightarrow a + b = a' + b'$$

es decir, la suma conserva la igualdad.

1.3. También conserva la igualdad el producto

$$\left.\begin{matrix} a = a' \\ b = b' \end{matrix}\right\} \Rightarrow ab = a'b'$$

Estas propiedades de las igualdades se utilizan frecuentemente en la resolución de ecuaciones.

IGUALDAD

$$\underset{\text{primer miembro}}{a} = \underset{\text{segundo miembro}}{b}$$

$$\left.\begin{matrix} a = a' \\ b = b' \end{matrix}\right\} \rightarrow a + b = a' + b'$$

$$\left.\begin{matrix} a = a' \\ b = b' \end{matrix}\right\} \rightarrow a \cdot b = a' \cdot b'$$

2 Ecuación

2.1. Consideremos la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{R}$; la función *proposicional* $f(x) = k$ [1] será verdadera para algunos elementos de $\mathbb{R}$ y falsa para otros; la expresión se dice que es una ecuación. Resolver la ecuación [1] significa encontrar su conjunto solución, es decir, el conjunto de los números x que la verifican.

Ejemplo:

- Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^2 - 5x$

  La ecuación $f(x) = -6$ da lugar a $x^2 - 5x = -6$, es decir, $x^2 - 5x + 6 = 0$, que es una ecuación de segundo grado.

  Las soluciones de esta ecuación son

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = x^2 - 5x$$
$$f(2) = 2^2 - 5 \cdot 2 = -6$$
$$f(3) = 3^2 - 5 \cdot 3 = -6$$

2.2. En general, si consideramos la función polinómica

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

hallar los originales de 0, es decir, los números cuya imagen es cero, es resolver la ecuación de segundo grado

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Si x_1 es uno de estos números, se verifica: $f(x_1) = 0$, y x_1 se llama raíz o cero del polinomio $f(x)$; también se llama solución de la ecuación $f(x) = 0$.

2.3. Sea ahora la función afín $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = ax + b$$

la ecuación $ax + b = 0$ se dice que es una ecuación lineal con una incógnita. También se llama lineal cualquier otra ecuación que se reduzca a la forma anterior aplicando propiedades de las igualdades.

Si f es una función polinómica el exponente mayor con que aparece la incógnita se llama grado de la incógnita.

$ax + b = 0$ es una ecuación de primer grado

$ax^2 + bx + c = 0$ es una ecuación de segundo grado.

Ejemplo:

- La ecuación

$$(x + 1)(x - 3) = x^2 + 7$$

  es de primer grado con una incógnita.

  En efecto, si realizamos las operaciones del primer miembro obtenemos: $x^2 - 2x - 3 = x^2 + 7$

  y sumando $-x^2 - 7$ a ambos miembros

$$(x^2 - 2x - 3) - x^2 - 7 = (x^2 + 7) - x^2 - 7$$

  nos queda, una vez simplificado, $-2x - 10 = 0$,

  que es del tipo $ax + b = 0$, siendo $a = -2$, $b = -10$.

1. Calcula los ceros o raíces del polinomio
$$x^2 - 10x + 24$$

2. En la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por
$$f(x) = x^2 - 7x + 12$$
¿Qué números tienen por imagen el cero?

3. ¿Es 5 solución de la ecuación
$$x^2 - 5x + 10 = 0?$$

4. ¿Es 2 solución de la ecuación
$$3x - 1 = 5?$$

5. Reduce al tipo $ax + b = 0$ las ecuaciones
   a) $x^2 - 1 = (x + 1)^2 - 3x$
   b) $2x + 5 = 3x - 7$
   c) $\frac{2}{3}(x - 2) = \frac{1}{4}(x - 5)$

3 Resolución de la ecuación de 1.er grado con una incógnita

Las ecuaciones se resuelven utilizando las propiedades de las igualdades y las propiedades del cuerpo de los números reales.

Vamos a resolver la ecuación $ax + b = 0$.

Sumando $-b$ a los dos miembros, obtendremos:

$$ax + b - b = 0 - b; \quad ax = -b$$

Si $a \neq 0$, multiplicamos por $\frac{1}{a}$ y resulta:

$$\frac{1}{a}\, ax = -b \cdot \frac{1}{a}; \quad x = -\frac{b}{a}$$

Si $a = 0$ la ecuación sería:

$0 \cdot x = b \rightarrow$
- Si $b = 0$, se verifica para cualquier valor de x. En este caso hay infinitas soluciones.
- Si $b \neq 0$, no se verifica para ningún valor real de x. En este caso no hay solución.

Para resolver cualquier otra ecuación de 1.er grado con una incógnita se reduce previamente a la forma $ax + b = 0$.

Ejemplo:

- Para resolver la ecuación:

$$\frac{x-3}{6} + \frac{2x-1}{3} - 5(x-2) = 5$$

Realizamos en primer lugar las operaciones indicadas

$$\frac{x-3}{6} + \frac{2x-1}{3} - 5x + 10 = 5$$

Multiplicamos los dos miembros por el m.c.m. de los denominadores

$$\text{m.c.m.} = (6, 3) = 6$$

$$\frac{6(x-3)}{6} + \frac{6(2x-1)}{3} - 6 \cdot 5x + 6 \cdot 10 = 5 \cdot 6$$

$$x - 3 + 2(2x - 1) - 30x + 60 = 30$$

$$x - 3 + 4x - 2 - 30x + 60 = 30$$

Sumando a los dos miembros -30 y simplificando se obtiene:

$$-25x + 25 = 0$$

luego

$x = 1$ es la solución de la ecuación dada.

Solución de $ax + b = 0$

$a \neq 0$ Solución única $x = \frac{-b}{a}$

$a = 0$
- Si $b = 0$, la solución es cualquier valor real de x.
- Si $b \neq 0$, no hay solución.

6. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $3x - 5(x - 2) = 8$

b) $4(x - 2) + 5(7 - x) = 22$

c) $\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x - 5 = x$

d) $3(x^2 - 5x + 2) = 3(x + 2)^3$

e) $\frac{1}{2}(x - 5) - \frac{1}{3}(x - 2) = 3(x - 1)$

f) $\frac{3x - 1}{x - 2} = \frac{3x - 7}{x + 4}$

4 Sistemas de ecuaciones lineales

4.1. Una ecuación del tipo

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$, b *son números reales conocidos y* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *incógnitas, se llama ecuación lineal con n incógnitas.*

La ecuación $ax + by = c$ es lineal con dos incógnitas. Un conjunto formado por más de una ecuación lineal se llama un sistema de ecuaciones lineales.

Ejemplo:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

Ecuación lineal

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b$$

$a_1a_2 \ldots a_n$, $b \in \mathbb{R}$

$x_1x_2 \ldots x_n$ incógnitas.

4.2. Resolver un sistema de ecuaciones es hallar el conjunto de valores de las incógnitas que satisfacen todas las ecuaciones del sistema simultáneamente.

A continuación pasamos a estudiar los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Ejemplo:

- El par de números $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ es una solución del sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \quad \text{ya que} \quad \begin{cases} 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 7 \\ 2 + 2 \cdot 1 = 4 \end{cases}$$

es decir, se verifican las dos ecuaciones del sistema a la vez.

4.3. *Representación gráfica de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.*

Se ha visto, que la solución del sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \quad \text{es} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

este sistema se puede escribir

$$y = \frac{7}{3} - \frac{2x}{3} \quad [1]$$

$$y = \frac{-x}{2} + 2 \quad [2]$$

7. Los valores $x = 1$ e $y = 7$ ¿son solución del sistema siguiente?

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = -6 \\ 2x + y = 9 \end{cases}$$

8. Indica si una solución del sistema

$$\begin{cases} 2x + 5y = 9 \\ 3x - 7y = 12 \end{cases}$$

es $x = 2y = 1$

Si designamos por r_1 y r_2 las rectas que representan a las funciones afines [1] y [2] respectivamente, resulta que el punto de coordenadas (2, 1) es el punto de intersección de ambas rectas (figura 1).

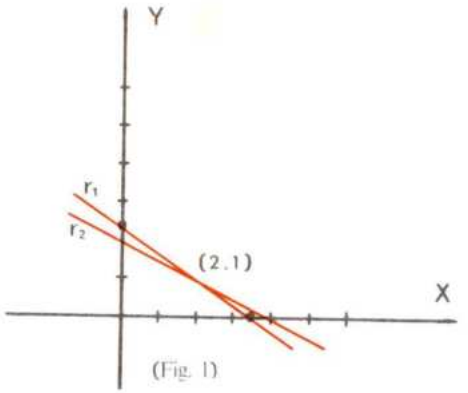
Si las rectas, como ocurre en el ejemplo anterior, se cortan, el sistema tiene solución única.

Si al representar el sistema $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

resultan dos rectas paralelas, no hay punto de intersección y, por tanto, el sistema no tiene solución.

Finalmente, si las rectas coinciden, el sistema tiene infinitas soluciones.

Veamos ahora la resolución analítica de los sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.



(Fig. 1)

9. Halla gráficamente la solución del sistema

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 3x - y = 8 \end{cases}$$

5 Método de reducción o de las combinaciones lineales

5.1. Consideremos el sistema

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \quad [1]$$

Multiplicando la primera ecuación por a' y la segunda por $-a$ obtenemos:

$$\begin{aligned} aa'x + ba'y &= ca' \\ -aa'x - ab'y &= -ac' \end{aligned}$$

Sumando ambas igualdades se obtiene:

$$(ba' - ab')y = ca' - ac' \quad \text{si} \quad ba' - ab' \neq 0$$

de donde $$y = \frac{ca' - ac'}{ba' - ab'}$$

De manera análoga, multiplicando la primera ecuación de [1] por $-b'$ y la segunda por b, se elimina la y, obteniendo para x:

$$x = \frac{c'b - cb'}{ba' - ab'}, \quad \text{si} \quad ba' - ab' \neq 0$$

5.2. Si $ba' - ab' \neq 0$, x e y son números bien determinados y se obtiene una solución única.

La condición para que exista solución única se puede escribir:

$$ba' - ab' \neq 0 \Rightarrow ba' \neq ab' \Rightarrow \frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$$

en este caso las restas r_1 y r_2, representaciones gráficas de $ax + by = c$ y $a'x + b'y = c'$ respectivamente, se cortan en un punto.

10. Resuelve los sistemas siguientes por el método de reducción:

a) $\begin{cases} 2x - 12y = 6 \\ 3x + y = 9 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{x - y}{7} = 12y + 4 \\ 2x - \dfrac{y - 3}{2} = 3x \end{cases}$

5.3. Si $ba' - ab' = 0$, las ecuaciones

$$\begin{cases}(ba' - ab')y = ca' - ac' \\ (ba' - ab')x = c'b - cb'\end{cases} \quad [2]$$

se pueden escribir

$$\begin{cases}0y = ca' - ac \\ 0x = c'b - cb'\end{cases} \quad [3]$$

Dentro de la hipótesis de que $ba' - ab' = 0$ podemos distinguir dos casos.

a) Si $c'b - bc' \neq 0$ o $ca' - ac' \neq 0$ el sistema [3] no tiene solución.

Las condiciones anteriores se pueden escribir: $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} \neq \dfrac{c}{c'}$,

en estos casos las rectas r_1 y r_2 son paralelas.

b) Si $c'b - bc' = 0$ y $ca' - ac' = 0$ en estas condiciones el sistema [3] tiene infinitas soluciones, pues, cualquier valor de y y de x satisface las ecuaciones de dicho sistema.

Las condiciones anteriores se pueden escribir $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$,

y este es, por tanto, la condición para que las rectas r_1 y r_2 sean coincidentes.

Ejemplos:

- Consideremos un sistema determinado, es decir, tal que $\dfrac{a}{a'} \neq \dfrac{b}{b'}$ (solución única)

$$\begin{cases}2x + y = 5 \rightarrow r_1 \\ x - y = 2 \rightarrow r_2\end{cases}$$

La solución como se indica gráficamente (figura 2) es el punto (1, 3).

- En el sistema $\begin{cases}2x + y = 5 \\ 4x + 2y = 10\end{cases}$

se verifica: $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$

El sistema tiene infinitas soluciones y las rectas que representen a ambas ecuaciones son coincidentes (figura 3).

- En el sistema $\begin{cases}4x + 2y = 10 \rightarrow r_1 \\ 2x + y = 3 \rightarrow r_2\end{cases}$

Se verifica: $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} \neq \dfrac{c}{c'}$ y $r_1 \parallel r_2$

$ab' - ab' \neq 0$ $\dfrac{a}{a'} \neq \dfrac{b}{b'}$		Solución única
$ab' - ba' = 0$	$\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} \neq \dfrac{c}{c'}$	No hay solución
$\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'}$	$\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$	Infinitas soluciones

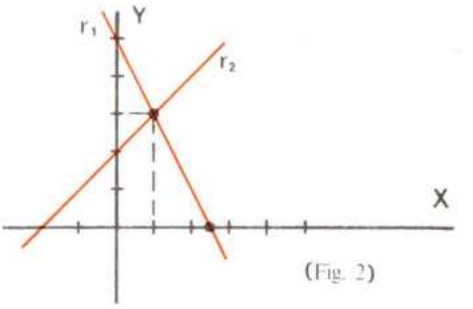
11. Indica sin resolverlo de qué tipo es el sistema

$$\begin{cases}y + x = 12 \\ 2x - 2y = 9\end{cases}$$

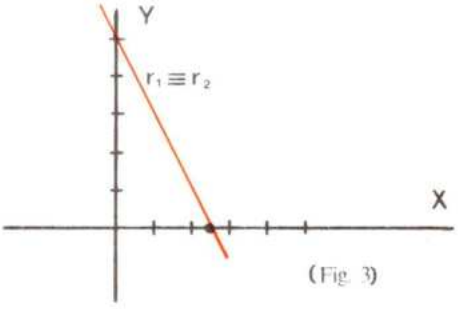
12. ¿Para qué valores de m el sistema

$$\begin{cases}2x - y = 5 \\ x + (m - 1)y = 9\end{cases}$$

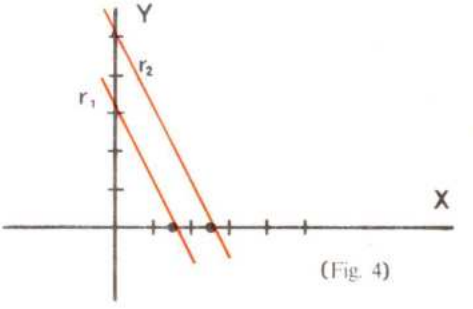
tiene una sola solución?



(Fig. 2)



(Fig. 3)



(Fig. 4)

6 Otros métodos de resolución de sistemas

Estudiaremos los métodos de igualación y sustitución con ejemplos.

6.1. *Método de igualación.*

Consiste en despejar la misma incógnita en ambas ecuaciones e igualar los resultados.

Sea el sistema: $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ x + 3y = 5 \end{cases}$

Despejamos y en ambas ecuaciones:

$$y = \frac{3x - 4}{2} \; [1]; \quad y = \frac{5 - x}{3} \; [2]$$

Igualando los valores de y resulta: $\frac{3x - 4}{2} = \frac{5 - x}{3}$,

que tiene sólo una incógnita; la solución de esta ecuación es $x = 2$.

Para hallar el valor de y se sustituye $x = 2$ en las expresiones [1] ó [2], con lo cual se tiene: $y = 1$.

6.2. *Método de sustitución.*

Consiste en despejar una de las incógnitas en una de las ecuaciones y sustituir la expresión obtenida en la otra ecuación.

Sea el sistema $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ x + 3y = 5 \end{cases}$

Despejamos x de la segunda ecuación, $x = 5 - 3y$, y sustituimos en la primera $3 \cdot (5 - 3y) - 2y = 4$

Ecuación en y, que resuelta da: $y = 1$.

Para hallar x, se sustituye este valor de y en $x = 5 - 3y$; $x = 5 - 3y = 5 - 3 \cdot 1 = 5 - 3 = 2$.

13. Resuelve por igualación y sustitución el sistema

$$\begin{cases} 2x - 3y = 9 \\ 3x + 5y = -15 \end{cases}$$

14. Resuelve por sustitución

$$\begin{cases} 2x - 5y - z = 0 \\ 3x - 2y + z = 0 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

15. Resuelve por igualación el sistema

$$\begin{cases} y = x^2 + 2 \\ y = x^2 + 2x - 2 \end{cases}$$

16. Resuelve por sustitución el sistema

$$\begin{cases} 2x = 6 \\ x + 3y = 12 \\ x + y - 5z = 24 \end{cases}$$

17. Resuelve por reducción, sustitución e igualación el sistema

$$\begin{cases} 3x + 5y = 29 \\ 2x - 3y = -6 \end{cases}$$

7 Sistemas no lineales

Son los que incluyen, por lo menos, alguna ecuación no lineal.

Sea, por ejemplo, el sistema no lineal

$$\begin{cases} 2x^2 - y - 3 = 0 \quad [1] \\ x - y = 2 \end{cases}$$

7.1. *Resolución gráfica.*

En la figura 5 se han representado las dos ecuaciones del sistema anterior

$y = 2x^2 - 3$, es una parábola de vértice $(0, -3)$
$y = x - 2$, es una recta.

Los puntos de intersección A y B de la parábola y de la recta son las soluciones del sistema.

7.2. *Resolución analítica.*

Si se sustituye el valor de $y = x - 2$ en la primera ecuación [1], resulta:

$$2x^2 - (x - 2) - 3 = 0 \Rightarrow 2x^2 - x - 1 = 0$$

Resolviendo esta ecuación de segundo grado obtenemos:

$$x = 1; \quad x = -1/2$$

para $x = 1$; $\quad y = x - 2 \Rightarrow y = 1 - 2 = -1$

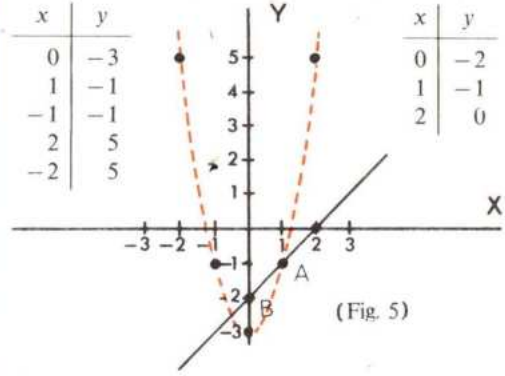
para $x = -1/2$; $\quad y = x - 2 \Rightarrow y = -1/2 - 2 = -5/2$

$y = 2x^2 - 3$

x	y
0	−3
1	−1
−1	−1
2	5
−2	5

$y = x - 2$

x	y
0	−2
1	−1
2	0



(Fig. 5)

18. Resuelve analítica y gráficamente el sistema

$$\begin{cases} y = x^2 - 3 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

19. Resuelve analítica y gráficamente el sistema

$$\begin{cases} y = (x - 3)^2 \\ y = (x - 4)^2 \end{cases}$$

8 Sistema de dos ecuaciones de 2.º grado

Consideremos ahora el sistema

$$\begin{cases} y = x^2 + 2 \\ y = x^2 + 2x - 2 \end{cases}$$

8.1. *Resolución gráfica.*

Las ecuaciones dadas se representan en dos parábolas que se cortan en el punto (2,6). (figura 6).

8.2. *Resolución analítica.*

$$y = x^2 + 2$$
$$y = x^2 + 2x - 2$$

Igualando los valores de y se obtiene:

$$x^2 + 2 = x^2 + 2x - 2 \Rightarrow 4 = 2x \Rightarrow x = 2$$

$$y = x^2 + 2 \Rightarrow y = 2^2 + 2 \Rightarrow y = 6$$

$y = x^2 + 2$

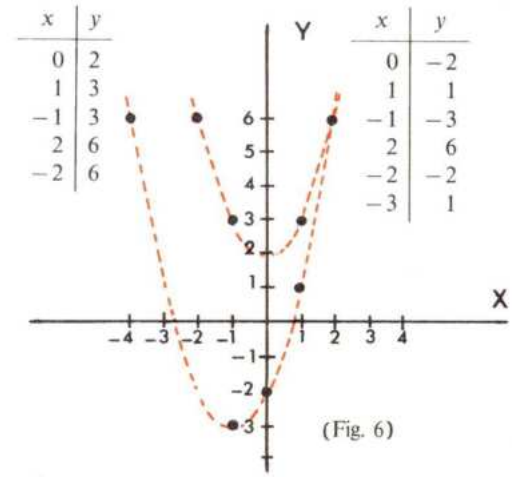
vértice (0, 2)

x	y
0	2
1	3
−1	3
2	6
−2	6

$y = x^2 + 2x - 2$
$y = (x + 1)^2 - 3$

vértice (−1, −3)

x	y
0	−2
1	1
−1	−3
2	6
−2	−2
−3	1



(Fig. 6)

Ejercicios y cuestiones

20. Restando seis unidades al triplo de un número se obtiene su mitad más cuatro. Halla dicho número.

21. Resuelve el sistema

$$\begin{cases} y = x^2 - 5x + 2 \\ x + 2y = -3 \end{cases}$$

22. Representa gráficamente las funciones

$$\begin{cases} y = x^2 - 7x + 10 \\ y = x - 2 \end{cases}$$

y halla la solución gráfica y analíticamente del sistema anterior.

23. Un móvil recorre 280 km a la velocidad 1.º de 40 km/h y después 60 km/h. Si la 1.ª velocidad hubiese sido doble hubiera recorrido 400 km. Halla el punto del trayecto en que el móvil cambió de velocidad.

24. Halla dos ángulos complementarios sabiendo que su diferencia son 15°.

25. El perímetro de un triángulo es 24 cm. Halla los lados sabiendo que uno de ellos es doble que otro y el tercero 3/2 de su suma.

26. Halla tres números enteros consecutivos cuyo producto es igual al triple del primero por el triple del segundo.

27. ¿Qué se puede decir de las rectas r_1 y r_2 $\begin{cases} a\,x + b\,y = c \to r_1 \\ a'x + b'y = c' \to r_2 \end{cases}$ si $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$?

28. Resuelve la ecuación

$$\frac{x}{3} - \frac{x}{6} + \frac{x}{2} - \frac{x}{4} = 12$$

29. Resuelve la ecuación

$$\frac{3x - 4}{5} = \frac{2x + 1}{3} - 7$$

30. Halla el valor de m que hace que la ecuación $(m - 3)x + 5 = 2mx - 13$ no tenga solución.

31. Escribe la ecuación de una recta paralela a la que tiene de ecuación $y = 4x - 5$.

32. Dado el sistema

$$\begin{cases} 2x + 5y = a \\ 5x + by = 12 \end{cases}$$

Halla a y b para que su solución sea $x = 2$, $y = 3$.

33. Resuelve por los métodos de reducción, sustitución e igualación, y representa gráficamente el sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$$

Tema 16

INECUACIONES
SISTEMAS DE INECUACIONES

El desarrollo del presente tema es similar al anterior. La solución de inecuaciones y sistemas de inecuaciones se hace por medio de las propiedades de las desigualdades.

Se resuelven inecuaciones de 1.er grado con una o dos incógnitas, representándolas mediante regiones del plano.

Es particularmente interesante el estudio de sistemas de inecuaciones que nos permitirá dar una expresión analítica de determinados subconjuntos del plano.

1 Desigualdades

En el cônjunto $\mathbb{R}$ de los números reales se define la siguiente relación representada con el signo $\leqslant$ (menor o igual que)

$$a \leqslant b \Leftrightarrow \exists\ r \geqslant 0, \quad \text{tal que} \quad a + r = b$$

Esta relación es una relación de orden (tema 8).

La relación $a < b$ se define como $a \leqslant b$ y $a \neq b$. Se suele leer $a < b$, *a estrictamente menor que b*.

La relación

$$a < b \text{ es equivalente a } b > a$$
$$a \leqslant b \text{ es equivalente a } b \geqslant a$$

Las relaciones de los tipos

$$a \leqslant b, \quad b \geqslant a, \quad a < b, \quad b > a$$

se llaman *desigualdades entre números reales. Dos desigualdades, ambas con los signos* $\leqslant$ *o ambas con el signo* $\geqslant$, *se dice que son del mismo sentido. Lo mismo si se emplea* $<$ *o* $>$.

Las relaciones $5 < 7$, $3 < 8$ son del mismo sentido.

En cambio las relaciones $5 < 7$, $9 > 3$ son de sentido contrario.

En la desigualdad $a \leqslant b$, a se llama primer miembro y b, segundo miembro.

$$2 + 4 \leqslant 3 + 6 \begin{cases} 1.^{er} \text{ miembro } 2 + 4 \\ 2.^{o} \text{ miembro } 3 + 6 \end{cases}$$

$$a \leqslant b \Leftrightarrow \exists r\ (r \geqslant 0) \quad \text{y} \quad (a + r = b)$$
$$a < b \Leftrightarrow (a \leqslant b) \quad \text{y} \quad (a \neq b)$$
$$a \geqslant b \Leftrightarrow b \leqslant a$$
$$a > b \Leftrightarrow b < a$$

1. Comprueba que la relación definida en el conjunto de los números reales:

$$a \leqslant b \Leftrightarrow \exists (r \geqslant 0) \text{ tal que } a + r = b$$

es una relación de orden.

2. Intercala el signo $<$, $>$, $\leqslant$, $\geqslant$, entre los siguientes pares de números reales:

a) 8 y 3 b) 3 y 7 c) 9 y 2 d) 5 y 5

3. Ordena, de acuerdo con la relación $<$, los números racionales siguientes:

$$\frac{2}{5}, \quad \frac{7}{6}, \quad \frac{24}{9}, \quad \frac{3}{8}$$

2 Propiedades de las desigualdades

Estudiaremos las tres propiedades siguientes:

2.1. *Si a los dos miembros de una desigualdad se suma el mismo número real, se obtiene otra desigualdad del mismo sentido.*

Es decir, $a \leqslant b \Leftrightarrow a + c \leqslant b + c$

En demostración esquematizada al margen se ha utilizado en ① y ④ la definición de la relación $\leqslant$, en ② se ha sumado c a los dos miembros de la igualdad $a + r = b$ finalmente en ③ se han utilizado las propiedades conmutativa y asociativa de la suma de números reales.

Ejemplo:

- $7 \leqslant 15 \Leftrightarrow 7 + 4 \leqslant 15 + 4 \Leftrightarrow 11 \leqslant 19$

2.2. *Si los dos miembros de una desigualdad se multiplican por el mismo número positivo se obtiene otra desigualdad del mismo sentido.*

Es decir, $c > 0,\ a \leqslant b \Leftrightarrow ac \leqslant bc$

En efecto: por definición de la relación

$$a \leqslant b \Leftrightarrow \exists r \geqslant 0 \quad \text{tal que} \quad a + r = b$$

multiplicando en la última igualdad por $c > 0$ resulta:

$$a + r = b \Leftrightarrow ac + rc = bc \Leftrightarrow ac \leqslant bc$$

En la última equivalencia se ha tenido en cuenta la definición de la relación $\leqslant$ y que $rc > 0$.

Ejemplo:

- $7 < 15$ Multiplicando por 3 se obtiene $21 < 45$

2.3. *Si multiplicamos los dos miembros de una desigualdad por un mismo número real negativo se obtiene una desigualdad de sentido contrario.*

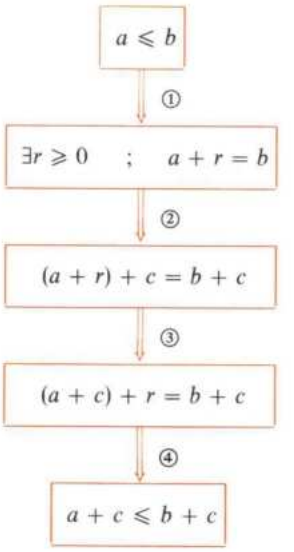
Es decir, $< 0,\quad a \leqslant b \Leftrightarrow ac \geqslant bc$

En los pasos ① y ④ de la demostración se ha utilizado la definición de la relación $\leqslant$; en ② se han multiplicado los dos miembros de la igualdad $a + r = b$ por el número negativo c. Finalmente, en ③, se ha sumado el opuesto de rc a los dos miembros de $ac + rc = bc$.

Ejemplo:

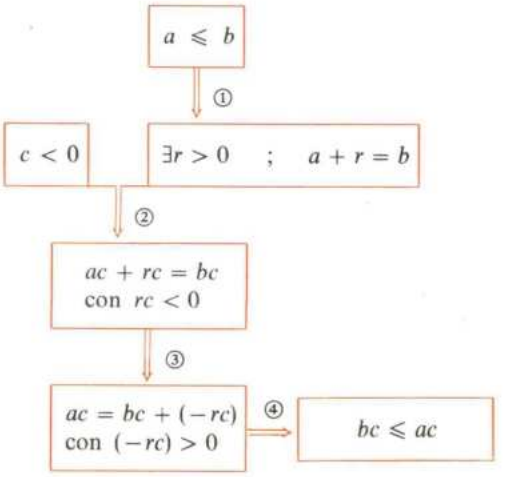
- Si en $3 \geqslant 2$ se multiplican ambos miembros por -6 resulta:

$$-18 \leqslant -12$$



4. Dada la desigualdad $7 < 10$ hallar otra equivalente cuyo primer miembro sea 2.

5. Prueba que si multiplicamos miembro a miembro desigualdades del mismo sentido, la desigualdad resultante tiene el mismo sentido que ambas. Pon algunos ejemplos.



3 Inecuación

Una inecuación es una desigualdad en la que aparecen números reales determinados y no determinados; estos últimos se representan por letras llamadas incógnitas.

Ejemplos:

- $7 + x \leqslant 13$ → Inecuación de una incógnita de primer grado.
- $24 \geqslant 13x^2 + y$ → Inecuación de dos incógnitas de segundo grado.
- $15 \geqslant 6x + 12y$ → Inecuación de dos incógnitas de primer grado.

  Las dos últimas tienen dos incógnitas. La segunda inecuación es de segundo grado porque 2 es el mayor exponente efectuando una incógnita.

6. Escribe dos inecuaciones con una incógnita y otras dos con dos incógnitas.

7. Pon un ejemplo de inecuación de segundo grado con una incógnita.

4 Resolución de una inecuación

Resolver una inecuación es hallar el conjunto de valores reales de las incógnitas que la satisfacen; este conjunto se llama *conjunto-solución.*

Ejemplo:

- La inecuación $2x \leqslant 6$ [1],

  se satisface para $x \leqslant 3$ [2], así que el conjunto solución o conjunto de verdad es

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 3\}$$

Las inecuaciones que como [1] y [2] tienen el mismo conjunto de soluciones se llaman «inecuaciones equivalentes».

La forma más general de resolver inecuaciones consiste en obtener inecuaciones equivalentes utilizando las propiedades estudiadas en **2.1.**, **2.2.**, **2.3.** de este tema.

La incuación $-2x \geqslant 8$ se satisface para $x \leqslant -4$; luego el conjunto-solución es $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -4\}$.

Una inecuación con una incógnita se escribe, en general, en la forma $f(x) \leqslant a$. El conjunto solución es $S = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \leqslant a\}$.

Análogamente, una ecuación con dos incógnitas se representa por $f(x, y) \leqslant a$, y su conjunto solución es

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid f(x, y) \leqslant a\}$$

8. Escribe una inecuación equivalente a

$$2x + 3 \leqslant 5$$

9. Es 4 un elemento del conjunto solución de $2x \leqslant 8$? ¿y de $2x \leqslant 9$? ¿y de $2x \leqslant 7$?

10. Representa en una recta el conjunto solución de la inecuación.

a) $2x \leqslant 8$ c) $3x \leqslant 6$
b) $x > 2$ d) $x^2 > 4$

5 Inecuación de 1.er grado con una incógnita

5.1. Definición: *Llamamos inecuación de 1.º grado con una incógnita cualquier inecuación del tipo*

$$ax + b < 0 \quad \text{o} \quad ax + b \leqslant 0$$

donde a y b son números reales y x una incógnita.

También son inecuaciones de 1.er grado con una incógnita las que puedan reducirse a los tipos anteriores utilizando las propiedades de las desigualdades.

Ejemplos:

- $x + 5 < 8$ es de primer grado.
- $(x - 4)x \leqslant x^2 + 2$ es también de primer grado con una incógnita pues de $x^2 - 4x \leqslant x^2 + 2$; sumando $(-x^2)$, en virtud de la propiedad **2.1.** obtenemos $-4x \leqslant 2 \Leftrightarrow -4x - 2 \leqslant 0$.

5.2. *Resolución de la inecuación* $ax + b \leqslant 0$.

Sumando el opuesto de b a ambos miembros de la desigualdad $ax + b < 0$ obtenemos una desigualdad del mismo sentido.

$$ax + b - b \leqslant -b; \quad ax \leqslant -b$$

Pueden presentarse tres casos:

$a > 0$: Multiplicando la inecuación por el inverso de a, que también es positivo, resulta:

$$\frac{1}{a}\, ax \leqslant -b\, \frac{1}{a} \Leftrightarrow x \leqslant \frac{-b}{a}$$

$a < 0$: Multiplicando también por $\frac{1}{a}$, que será negativo, la desigualdad cambia de sentido $x \geqslant \frac{-b}{a}$.

$a = 0$: En este caso $0 \cdot x \leqslant -b$.

Esta inecuación se verifica para todo valor real de x, si b es negativo o cero, y no habrá ningún valor de x que la verifique si b es positivo.

Si queremos resolver una inecuación del tipo $ax + b < 0$ excluimos de las anteriores soluciones los valores de x, que verifiquen $ax + b = 0$.

Inecuaciones de primer grado con una incógnita

$$ax + b < 0 \quad \text{o} \quad ax + b \leqslant 0$$

Resolución de $ax + b \leqslant 0$,

$$ax \leqslant -b \begin{cases} a > 0 & x \leqslant \dfrac{-b}{a} \\ a < 0 & x \geqslant \dfrac{-b}{a} \end{cases} \qquad a \neq 0$$

$$0x \leqslant -b \begin{cases} b \leqslant 0 & x \text{ cualquier valor real} \\ b > 0 & x \text{ ningún valor real} \end{cases} \qquad a = 0$$

11. ¿Cuál es el conjunto solución de la inecuación $0x \leqslant 2$?

12. ¿Tiene alguna solución la inecuación

$$0x = \leqslant -2$$

13. Resuelve la inecuación $2x - 3 > 5$

14. Resuelve la inecuación $2x + 5 \leqslant 3x - 8$.

15. Resuelve la siguiente inecuación y representa sobre una recta su conjunto solución.

$$5x + 1 \leqslant 2x + 3$$

Vamos a resolver la inecuación

$$(x - 4)\,(x + 2) \leqslant x^2 + 6$$

Se resuelve esta inecuación en el esquema del margen.

En ① se han realizado las operaciones indicadas en el primer miembro.

En ② se ha sumado $-x^2 - 6$ a los dos miembros y se ha simplificado.

En ③ se ha sumado 14 a los dos miembros de $-2x - 14 \leqslant 0$.

Finalmente, en ④ se ha multiplicado por $-1/2$, con lo que cambia de sentido la desigualdad.

El conjunto-solución es $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -7\}$

Este conjunto se ha representado en la siguiente semirrecta:

Sea ahora la inecuación $\dfrac{2x + 3}{x - 1} \geqslant 1$ [1]

Como el denominador $x - 1$ debe ser distinto de cero, distinguiremos dos casos:

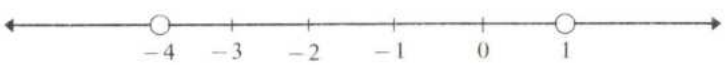
a) $x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$. Multiplicando los dos miembros de [1] por $x - 1$ resulta la desigualdad $2x + 3 \geqslant x - 1$, que tiene el mismo sentido que [1], ya que $x - 1$ es positivo, luego $x \geqslant -4$. Como se ha de verificar a la vez $\begin{cases} x > 1 \\ x \geqslant -4 \end{cases}$ la solución en este primer caso es: $S_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$.

b) $x - 1 < 0 \Rightarrow x < 1$. Multiplicando los dos miembros de [1] por $x - 1$ resulta la desigualdad $2x + 3 \leqslant x - 1$, de sentido contrario a [1], ya que $x - 1$ es negativo, luego $x \leqslant -4$. Como se ha de verificar a la vez $\begin{cases} x < 1 \\ x \leqslant -4 \end{cases}$ la solución en este segundo caso es: $S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -4\}$.

Luego el conjunto solución de la inecuación [1] es:

$$S = S_1 \cup S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid (x \leqslant -4) \text{ ó } (x > 1)\}$$

La representación gráfica de S es la que se indica a continuación.



$$(x - 4)\,(x + 2) \leqslant x^2 + 6$$

①

$$x^2 - 4x + 2x - 8 \leqslant x^2 + 6$$

②

$$-2x - 14 \leqslant 0$$

③

$$-2x \leqslant 14$$

④

$$x \geqslant -7$$

16. Resuelve las inecuaciones

a) $\dfrac{2x + 3}{x - 2} \geqslant -1$

b) $(x - 1)(x + 2) \leqslant x^2 + 1$

6 Sistemas de dos ecuaciones con una incógnita

6.1. Sean las inecuaciones

$$-2x - 6 \leqslant 0$$
$$3x + 3 \leqslant 0$$

El conjunto-solución de la primera es

$$S_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -3\}$$

y de la segunda

$$S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -1\}$$

El conjunto que satisface a ambas inecuaciones a la vez será $S_1 \cap S_2$

$$S_1 \cap S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid (x \geqslant -3) \text{ y } (x \leqslant -1)\} =$$
$$= \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x \leqslant -1\} = [-3, -1]$$

que viene representada gráficamente por un segmento.

6.2. Pretendemos hallar ahora el conjunto de los valores de x que satisfacen a las inecuaciones

$$2x + 6 \leqslant 0$$
$$-x + 1 \leqslant 0$$

La solución de la primera es:

$$x \leqslant -3 : S_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -3\}$$

La solución de la segunda es:

$$x \geqslant 1 : S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 1\}$$

Las soluciones comunes de ambas inecuaciones será:

$$S_1 \cap S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid (x \leqslant -3) \text{ y } (x \geqslant 1)\}$$

En la representación gráfica se observa que S_1 y S_2 son disjuntos.

luego la solución es: $S_1 \cap S_2 = \varnothing$.

17. Representa en la recta real los conjuntos

$$S_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 6\}$$
$$S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid (x \leqslant 6) \quad \text{y} \quad (x \geqslant 2)\}$$
$$S_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant x \leqslant 6\}$$

18. Representa en una recta el conjunto que satisface a la vez las inecuaciones

$$\begin{cases} 3x < 9 \\ x > \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

19. ¿Cuáles son los puntos x de la recta real que verifican a la vez las inecuaciones

$$\begin{cases} 2x + 5 < 3x \\ -x + 8 < 4 \end{cases}$$

20. ¿Cuál es el conjunto de los valores reales de x que verifiquen simultáneamente

$$2x > 8$$
$$2x < 4$$

7 Inecuaciones $|x|a$; $|\geqslant a$; $|cx+d|\leqslant a$ $y=|x-a|$

7.1. Se define el valor absoluto de x del modo siguiente:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ si } x \geqslant 0 \\ -x, \text{ si } x \leqslant 0 \end{cases} \quad o \text{ también, } |x| = \max\{x, -x\}$$

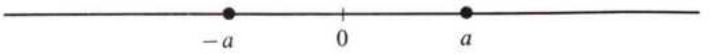
Es decir, $|x|$ es el mayor de los números x y $-x$.

¿Cuál será el conjunto de valores de x que verifica $|x| \leqslant a$?

$$|x| \leqslant a \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant a, \text{ si } x \geqslant 0 \\ -x \leqslant a \text{ o } x \geqslant -a, \text{ si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

La inecuación $|x| \leqslant a$ es equivalente al sistema $\begin{cases} x \leqslant a \\ x \geqslant -a \end{cases}$ y su conjunto solución es $S = \{x \in \mathbb{R} \mid (x \leqslant a \text{ o } x \geqslant -a)\} = \{x \in \mathbb{R} \mid -a \leqslant x \leqslant a\}$.

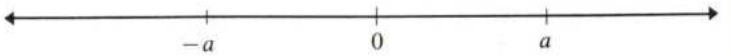
La representación de este conjunto de números reales es la siguiente:



7.2. Consideremos ahora la inecuación $|x| \geqslant a$.
Según la definición de valor absoluto se tiene:

$$|x| \geqslant a \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant a, \text{ si } x \geqslant 0 \\ -x \geqslant a \text{ o } x \leqslant -a, \text{ si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

El conjunto solución es $S = \{x \in \mathbb{R} \mid (x \leqslant -a) \text{ o } (x \geqslant a)\}$, su representación gráfica es la siguiente:



7.3. Consideremos ahora la inecuación $|2x-6| \leqslant 4$ de la forma $|cx+d| \leqslant a$

$$|2x-6| \leqslant 4 \Leftrightarrow \begin{cases} (2x-6) \leqslant 4 \\ (2x-6) \geqslant -4 \end{cases}$$

Resolviendo ambas inecuaciones y llamando S_1 y S_2 a los conjuntos-solución de $2x-6 \leqslant 4$ y $2x-6 \geqslant -4$ respectivamente resulta: $2x < 10 \Rightarrow x \leqslant 5 : S_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 5\}$

el conjunto-solución de la segunda es:

$$2x \geqslant 2 \Rightarrow x \geqslant 1 : S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 1\}$$

21. Representa gráficamente el conjunto solución de la inecuación

$$|x| < 5$$

22. Representa gráficamente

$$S_1 = \{x \in \mathbb{R} \ / \ |x| > 3\}$$

23. ¿Cuál es el conjunto de números reales que verifican las dos condiciones siguientes, $|x| \leqslant 3$, $|x| \geqslant 2$? Representa dicho conjunto en una recta.

24. Resuelve la inecuación

$$|-x-6| < 3$$

25. Resuelve las siguientes inecuaciones y representa gráficamente sus conjuntos solución:

$$|x-5| < 3$$
$$|x-5| < 2$$
$$|x-5| < 1$$
$$|x-3| < 1$$
$$|x-1| < 1$$

La solución de ambas inecuaciones es $S_1 \cap S_2$

$$S = S_1 \cap S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid (x \geqslant 1) \text{ y } (x \leqslant 5)\} = \\ = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 5\} = [1,5]$$

cuya representación gráficamente es la siguiente:

26. Explica cómo sería el conjunto solución de la inecuación

$$|x - a| < \varepsilon$$

siendo a y ε conocidos y x la incógnita.

8 Representación gráfica de la función $y = |x - a|$

Sea la función $y = f(x) = |x|$. Se trata de una función afín a intervalos. En efecto, según la definición de valor absoluto se tiene

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ x & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{cases}$$

Su representación gráfica está dada en la figura 1. Consideremos ahora la función $y = f(x) = |x - a|$

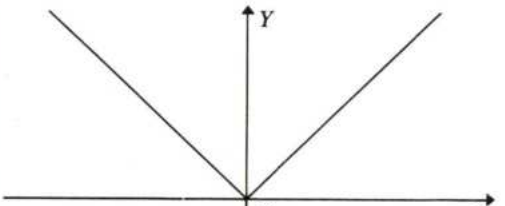
será

$$f(x) = \begin{cases} x - a & \text{si} \quad x - a \geqslant 0 \\ -(x - a) & \text{si} \quad x - a \leqslant 0 \end{cases}$$

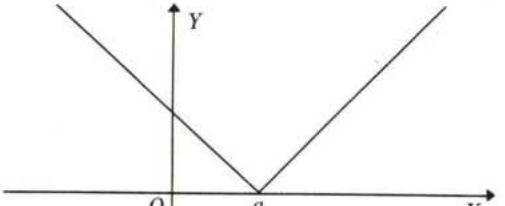
o también

$$f(x) = \begin{cases} x - a & \text{si} \quad x \geqslant a \\ -x + a & \text{si} \quad x \leqslant a \end{cases}$$

Su representación gráfica se ha dado en la figura 2.



(Fig. 1)



(Fig. 2)

9 Inecuación de 1.er grado con dos incógnitas

9.1. *Una inecuación de* 1.e *grado con dos incógnitas es cualquier inecuación de los tipos siguientes:*

$$y > ax + b; \quad y \geqslant ax + b$$
$$y < ax + b; \quad y \leqslant ax + b$$

Siendo a, b números reales dados, x e y son números reales desconocidos llamados incógnitas.

También son inecuaciones de 1.er grado con dos incógnitas todas las inecuaciones reducibles a los tipos anteriores utilizando las propiedades de las desigualdades.

Ejemplo:

- La inecuación $2x + 3y - 2 \geqslant x - y + 6$ se puede reducir a la $4y \geqslant -x + 8$ [1], sumando a los dos miembros de la primera $y - 2x + 2$; si en [1] se multiplica por 1/4 los dos miembros, resulta $y \geqslant -\frac{1}{4}x + 2$, que es una inecuación del tipo dado en la definición.

9.2. Vamos a representar el conjunto solución de la inecuación $y < 2x + 3$; para ello representamos gráficamente la función afín $y = 2x + 3$.

Para $x = 0$; $y = 3$.

Para $y = 0$; $x = -\frac{3}{2}$.

Tenemos así los puntos (0,3) y $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ que determinen la recta r (figura 3).

Se observa, que para $x = 1$, $y = 2 \cdot 1 + 3 = 5$ esto indica, que el punto (1,5) verifica la ecuación $y = 2x + 3$. En la figura 4 se observa que los puntos (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), verifican la inecuación $y < 2x + 3$ esto mismo, se puede probar sustituyendo las coordenadas de estos puntos en la inecuación anterior.

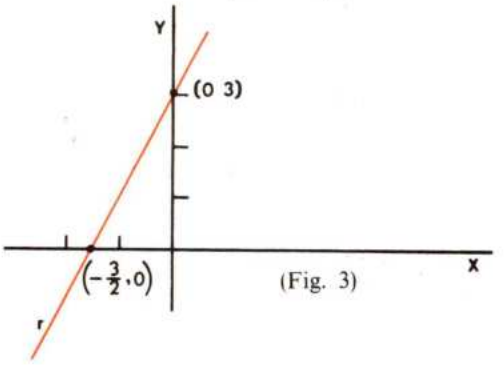
La recta r, que es la representación gráfica de $y = 2x + 3$, divide al plano en dos semiplanos.

En el semiplano rayado, se encuentran los puntos que verifican la inecuación $y < 2x + 3$, y en el semiplano no rayado se encuentran los puntos en los que $y > 2x + 3$.

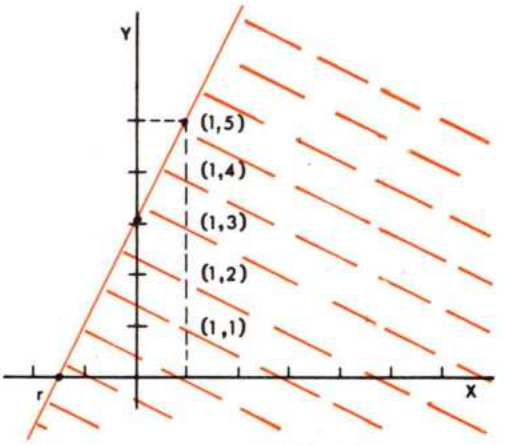
Así para el punto (2,9) se tiene $9 > 2 \cdot 2 + 3 = 7$ luego, el punto (2,9) verifica la inecuación $y > 2x + 3$ y, por lo tanto, está por encima de la recta r, es decir, en el semiplano no rayado.

27. Reduce a una inecuación de los tipos dados en la definición la siguiente:

$3x - 5y \geqslant 2x + y$



(Fig. 3)



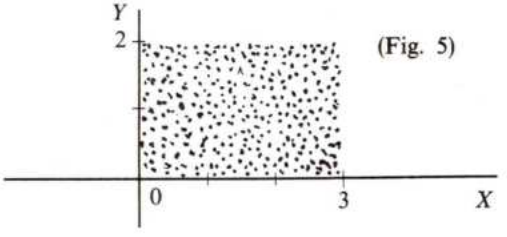
(Fig. 4)

Representa una gráfica de $y < 2x + 3$.

28. ¿Cuáles de los puntos siguientes son solución de la inecuación $y - x > 5$?

(1, 3), (7, 4), (1, 9), (5, 9), (5, 10), (1, 1)

29. Observa la figura 5 y escribe las condiciones que verifican los puntos que se encuentran en la parte del plano punteado.



(Fig. 5)

10 Representación de un sistema de inecuaciones de primer grado con dos incognitas.

10.1. Sean las inecuaciones $y < 2x + 5$, $y > \frac{1}{2}x$. Se trata de hallar el conjunto de puntos que verifiquen a la vez las dos inecuaciones.

En la figura 6 se han representado las rectas r_1 y r_2, que son las representaciones gráficas de las funciones afines $y = 2x + 5$ e $y = \frac{1}{2}x$, respectivamente.

La inecuación $y < 2x + 5$ viene representada por el semiplano que contiene el origen de coordenadas, ya que $0 < 2 \cdot 0 + 5$. En la figura se ha rayado dicho semiplano horizontalmente.

La inecuación $y > \frac{1}{2}x$ viene representada por el semiplano rayado en negro.

La intersección de los dos semiplanos es la región angular que aparece rayada doblemente.

Los puntos de esta región, excluyendo los lados y el vértice, verifican a la vez las condiciones $y < 2x + 5$ e $y > \frac{1}{2}x$; esta exclusión de los lados y el vértice es debido a que ambas inecuaciones son desigualdades estrictas.

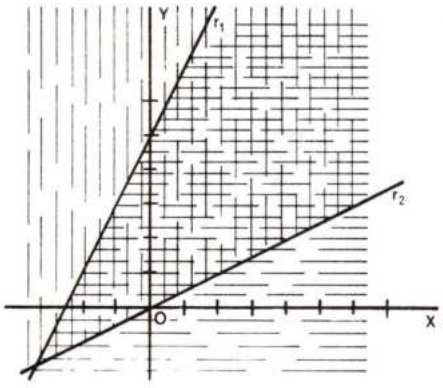
10.2. Consideremos ahora las inecuaciones

$$[1]\begin{cases} y < 2x + 5 \\ y > \frac{1}{2}x \\ y < -x + 6 \end{cases}$$

Las dos primeras son las mismas estudiadas en **10.1.**, cuya solución es el conjunto de puntos de la región angular BAC, excluyendo los puntos de los lados. Ahora tratamos de encontrar los puntos del plano que verifiquen a la vez las tres inecuaciones anteriores.

La recta r_3 (figura 7) representa a las ecuaciones $y = -x + 6$.

Como la inecuación $y < -x + 6$ viene representada por el semiplano que contiene al origen de los dos que determina r_3, resulta que los puntos interiores al triángulo ABC cumplen las tres condiciones [1], y es por eso el conjunto-solución de las tres inecuaciones.



(Fig. 6)

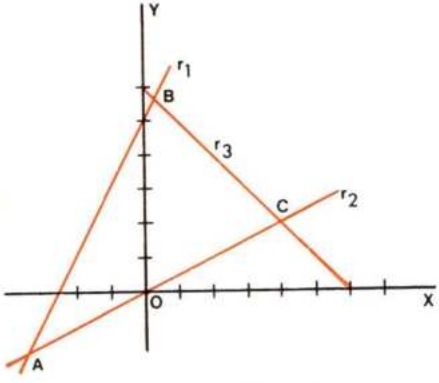
Solución de $\begin{cases} y < 2x + 5 \\ y > 1/2x \end{cases}$

31. Representa el conjunto de puntos que verifiquen a la vez las inecuaciones

$$y \geqslant 2 \quad ; \quad x \geqslant 3$$

32. Resolver el siguiente sistema de inecuaciones

$$y > x \quad ; \quad y < -x$$



(Fig. 7)

11 Resolución de la inecuación $ax^2 + bx + c > 0$

11.1. Vamos a resolver la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$; supongamos que el discriminante $b^2 - 4ac$ sea positivo. Las soluciones x_1 y x_2 serán reales y distintas.

Como $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, la inecuación $ax^2 + bx + c > 0$ toma la forma $a(x - x_1)(x + x_2) > 0$.

Sea $x_1 < x_2$.

Si damos a x valores a la izquierda de x_1, es decir, $x < x_1$

$$\text{se obtiene} \begin{cases} x - x_1 \text{ negativo} \\ x - x_2 \text{ negativo} \end{cases}$$

Si x está entre x_1 y x_2, es decir, $x > x_1$, $x < x_2$

$$\text{se obtiene} \begin{cases} x - x_1 \text{ positivo} \\ x - x_2 \text{ negativo} \end{cases}$$

Si x lo tomamos a la derecha de x_2, es decir, $x > x_2$

$$\text{se obtiene} \begin{cases} x - x_1 \text{ positivo} \\ x - x_2 \text{ positivo} \end{cases}$$

El signo de $a(x - x_1)(x - x_2)$ depende también de a que puede ser positivo o negativo. En la tabla de la derecha se resumen los casos posibles.

Resumen

Si a es positivo, $a(x - x_1)(x - x_2) > 0$, cuando

$$x < x_1 \quad \text{o} \quad x > x_2$$

Si a es negativo, $a(x - x_1)(x - x_2) > 0$, cuando

$$x_1 < x \quad \text{y} \quad x < x_2$$

11.2. Si $b^2 - 4ac = 0$ la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ tiene una raíz doble x_1

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow a(x - x_1)^2 = 0$$
$$ax^2 + bx + c > 0 \Leftrightarrow a(x - x_1)^2 > 0$$

Como $(x - x_1)^2$ es positivo para todo valor real de x, si $a > 0$ será $ax^2 + bx + c > 0$, para todo valor de x; en cambio si $a < 0$, no se verifica dicha inecuación para ningún valor real de x; luego no habrá solución.

11.3. Si $b^2 - 4ac < 0$, ningún valor real de x es solución de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, luego el valor numérico del polinomio $ax^2 + bx + c$ será siempre un número positivo o negativo para todo valor real de x.

$a > 0$	$x < x_1$	$a(x - x_1)(x - x_2)$ $+ \cdot - \cdot -$	$+$
	$x_1 < x$ $x < x_2$	$a(x - x_1)(x - x_2)$ $+ \cdot + \cdot -$	$-$
	$x > x_2$	$a(x - x_1)(x - x_2)$ $+ \cdot + \cdot +$	$+$
$a < 0$	$x < x_1$	$a(x - x_1)(x - x_2)$ $- \cdot - \cdot -$	$-$
	$x_1 < x$ $x < x_2$	$a(x - x_1)(x - x_2)$ $- \cdot + \cdot -$	$+$
	$x > x_2$	$- \cdot + \cdot +$	$-$
	$x = x_1$		0
	$x = x_2$		0

Solución de la inecuación $ax^2 + bx + c > 0$ cuando $a > 0$ y $b^2 - 4ac > 0$.

Solución de la inecuación $ax^2 + bx + c > 0$ cuando $a < 0$ y $b^2 - 4ac > 0$.

Solución de $ax^2 + bx + c > 0$ en los distintos casos

		Solución
$b^2 - 4ac > 0$ $x_1 \neq x_2$ $x_1 < x_2$	$a > 0$	$x < x_1$ o $x > x_2$
	$a < 0$	$x_1 < x$ y $x < x_2$
$b^2 - 4ac = 0$ $x_1 = x_2$	$a > 0$	$\mathbb{R} - \{x_1\}$
	$a < 0$	$\varnothing$
$b^2 - 4ac < 0$ $x_1, x_2 \notin \mathbb{R}$ $x_1 < x_2 \notin \mathbb{R}$	$a > 0$	$\mathbb{R}$
	$a < 0$	$\varnothing$

Ejercicios y cuestiones

30. Representa las inecuaciones

a) $y < x$
b) $y \leqslant x + 1$
c) $y > x + 2$

33. Resuelve la inecuación $x^2 - 6x - 8 > 0$.

34. Resuelve la inecuación $x^2 - 6x + 9 \leqslant 0$.

35. Resuelve $x^2 - 5x + 4 < 0$.

36. Representa gráficamente la función $y = x^2 - 4x + 3$ y decir para qué valores de x resulta y positiva, para cuáles 0 y para cuales negativa.

37. Puedes explicar por qué $x^2 + x + 1$ es positivo para cualquier valor real de x.

38. Un móvil se desplaza por una línea recta a una velocidad comprendida entre 100 m/seg y 150 m/seg.

¿Entre qué valores oscila la distancia del móvil al punto de partida al cabo de tres horas?

39. Resuelve la inecuación

$$\frac{x-3}{5} + \frac{2x+6}{2} \geqslant \frac{x}{4} - \frac{3x-6}{2}$$

40. Para qué valores de m la inecuación $3x^2 - (m-2)x + 7 > 0$ tiene por solución el conjunto $\mathbb{R}$.

41. Resuelve la inecuación $|x| - x \geqslant 0$.

42. Halla la solución del sistema de inecuaciones

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \leqslant 0 \\ x - 1 \geqslant 0 \end{cases}$$

43. Escribe una inecuación cuyo conjunto solución es el representado en la recta r.

44. Representa en un sistema de ejes coordenados las soluciones de las inecuaciones

$$y < |x| \qquad y \geqslant |x - 2|$$

45. Halla el área de la parte del plano que cumple las condiciones

$$y > x \qquad x > -5 \qquad |y| < 2$$

46. Escribe una inecuación o un sistema de inecuaciones cuya solución sea el conjunto

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid (x \leqslant 6) \quad \text{y} \quad (x \geqslant 2)\}$$

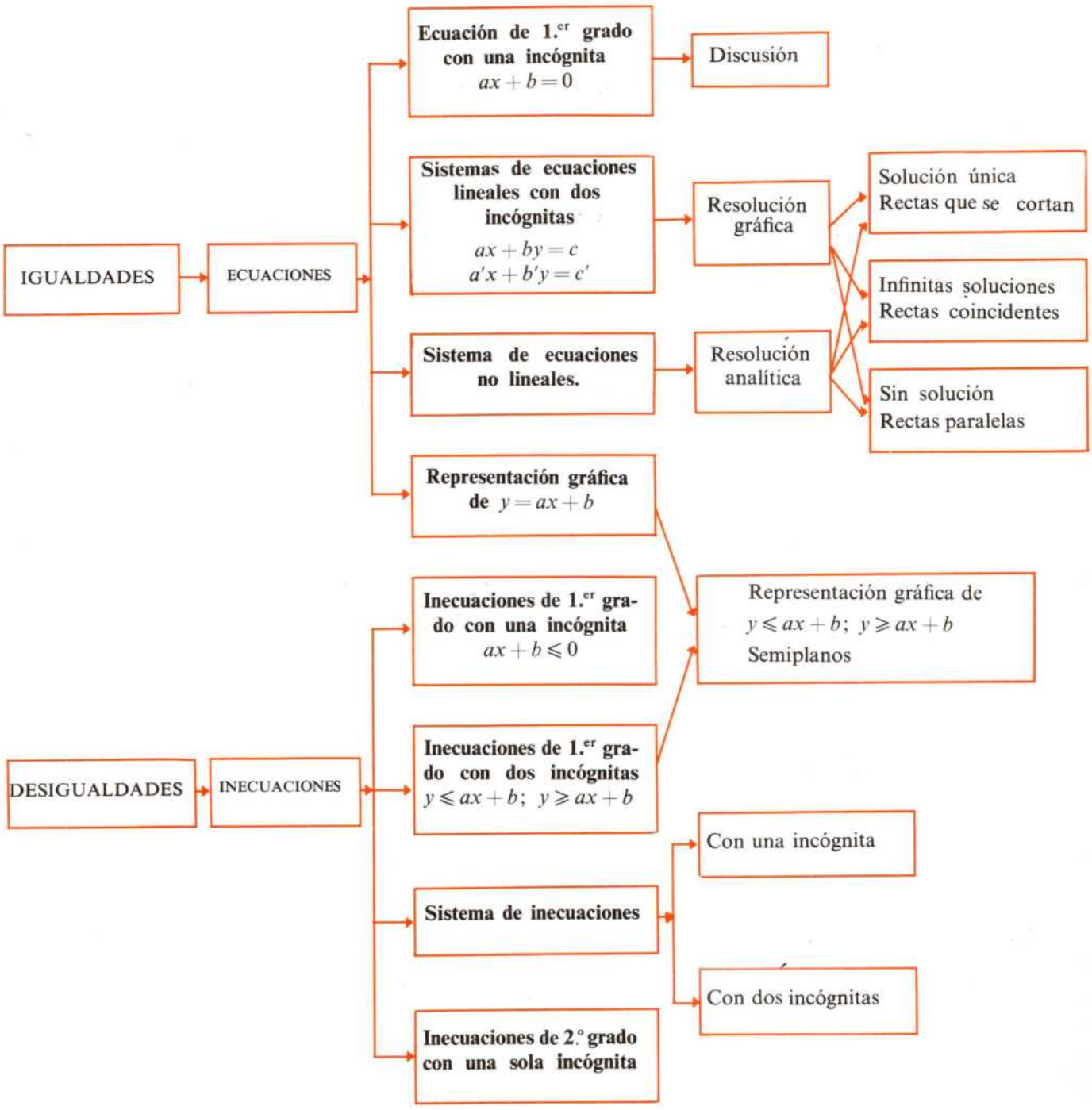
47. Resuelve la inecuación $(x - 2)(x + 3) \geqslant 0$.

48. El producto de dos números es negativo y su suma mayor que 2. Representa en el plano el conjunto de puntos que cumplen estas condiciones.

49. Resuelve la inecuación $x^2 - 5x + 6 \geqslant 0$.

DIAGRAMA ESTRUCTURAL DE LA UNIDAD

ECUACIONES. INECUACIONES Y SISTEMAS



Unidad 7

PROGRESIONES. INTERES

Las sucesiones de números reales, son una clase particular de aplicaciones que tienen por dominio el conjunto de los números naturales estrictamente positivos; pero en estas sucesiones particulares, que son las progresiones, sólo nos van a interesar un número finito de términos en la mayoría de los problemas. Se ha distribuido el contenido de esta Unidad en tres temas.

En el primero, se estudian las progresiones aritméticas.

En el segundo, las progresiones geométricas.

Finalmente, en el tema 19, último de esta Unidad, se estudia el interés simple y compuesto así como las anualidades.

Tema 17

1. Término general de una sucesión.
2. Progresión aritmética.
3. Interpolación.
4. Suma de n términos consecutivos de una progresión aritmética.

Tema 18

1. Progresión geométrica.
2. Interpolación.
3. Producto de n términos consecutivos de una progresión geométrica.
4. Suma de los n primeros términos de una progresión geométrica.
5. Progresión geométrica decreciente.

Tema 19

1. Interés simple.
2. Interés compuesto.
3. Anualidades.

Tema 17 PROGRESIONES ARITMETICAS

El propósito de este tema es estudiar un tipo particular de sucesiones que son las progresiones aritméticas. Después de dar la definición de progresión aritmética, se obtiene a partir de ella la fórmula del término general; a continuación se estudia el problema de la interpolación como una aplicación de dicha fórmula, para finalmente obtener la fórmula de la suma de los n primeros términos.

1 Término general de una sucesión

1.1. Una sucesión de números reales la representaremos por $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ y es, como ya sabemos, una aplicación de $\mathbb{N}^*$ en $\mathbb{R}$.

Al término a_n se le llama término enésimo o término general de la sucesión.

1.2. Una sucesión tiene infinitos términos y se expresa corrientemente por su término general dado como una función del número natural n.

Sea la sucesión $a_n = 5n + 2$; a partir de este término general puede hallarse cualquier término de la sucesión sin más que sustituir n por el orden del término deseado.

$$a_n = 5n + 2$$
$$a_1 = 5 \cdot 1 + 2 = 7$$
$$a_2 = 5 \cdot 2 + 2 = 12$$
$$a_3 = 5 \cdot 3 + 2 = 17$$

De esta forma, conociendo el término general se conoce siempre cualquier término de la sucesión.

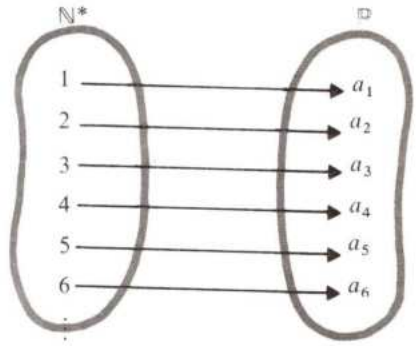
Ejemplo:

- El término 6.º de la sucesión, de término general $a_n = \frac{2}{b}$,

$$a_6 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

1.3. Hemos visto la facilidad con que se puede obtener cualquier término de una sucesión conociendo el término general.

Conocidos los primeros términos de una sucesión, también puede hallarse, a veces, el término general, pero éste es ya un problema más difícil.



1. Escribe los cinco primeros términos de la sucesión de término general $a_n = 2n + 1$.

2. Escribe el término a de la sucesión de término general

$$a_n = \frac{5 + n}{n}$$

3. Escribe los diez primeros términos de la sucesión de término general.

$$a_n = \frac{2n^2 + 1}{3}$$

Ejemplo:

- Considérese la sucesión: $1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{5}$

  Se observa que:

  $$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{1}{3}, \quad a_4 = \frac{1}{4}, \quad a_5 = \frac{1}{5}$$

  a_n será $\frac{1}{n}$, $\quad a_n = \frac{1}{n}$

- El término general de la sucesión

  $$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots \quad \text{es} \quad a_n = \frac{n}{n+1}$$

4. Escribe el término general de la sucesión cuyos primeros términos son:

$$a_1 = 2, \; a_2 = 4, \; a_3 = 6, \; a_4 = 8$$

5. ¿Cuál es el término general de una sucesión cuyos primeros términos son:

$$1, 4, 9, 16, 25, \ldots$$

6. Escribe los términos generales de las sucesiones cuyos primeros términos son:

$$-2, 5, 10, 17, 26, \ldots$$

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{5}{2}, \quad \frac{7}{2}$$

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

2 Progresión aritmética

2.1. Consideremos la sucesión cuyos términos primeros son:

$$2, 5, 8, 11, 14, \ldots \; [1]$$

El primer término es 2, $a_1 = 2$.

El segundo término es 5, $a_2 = 5$

$$\begin{array}{ccccc} 5 & = & 2 & + & 3 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ a_2 & = & a_1 & + & 3 \end{array}$$

El tercer término es 8, $a_3 = 8$

$$\begin{array}{ccccc} 8 & = & 5 & + & 3 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ a_3 & = & a_2 & + & 3 \end{array}$$

El cuarto término es 11

$$\begin{array}{ccccc} 11 & = & 8 & + & 3 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ a_4 & = & a_3 & + & 3 \end{array}$$

Cada término de la sucesión [1] *es igual al anterior, más un número fijo; estas sucesiones, que como la* [1] *se forman con este criterio, se llaman progresiones aritméticas.*

El número fijo que se suma a cada término para obtener el siguiente se llama *diferencia* de la progresión aritmética, y se designa por d.

7. Comprueba que el término a_5 de la sucesión 2, 5, 8, 11, 14... es igual al término a_4 más 3.

Halla a_6 y a_7.

8. Comprueba que en una progresión aritmética un término es igual al siguiente menos la diferencia. Utiliza el ejemplo del ejercicio 7.

9. Se tiene la sucesión cuyos primeros términos son:

$$1, \frac{n-1}{n}, \quad \frac{n-2}{n}, \quad \frac{n-3}{n}$$

¿Es una progresión aritmética?

¿Cuál es su diferencia?

10. El primer término de una progresión aritmética es -5 y la diferencia 3. Halla los diez primeros términos de esa progresión.

2.2. Conocido un término y la diferencia de una progresión aritmética se pueden hallar los demás términos.

Ejemplo:

- El término a_3 de una progresión aritmética es 5 y la diferencia 2.

  El término a_2 será:

  $$5 - 2 = 3$$

  pues $a_3 = a_2 + d$ (d es la *diferencia*), de donde $a_3 - d = a_2$ del mismo modo se procede para calcular a_1;

  $$a_1 = a_2 - d \quad ; \quad a_1 = 3 - 2 = 1$$

  Como $a_4 = a_3 + d$ resulta $a_4 = 5 + 2 = 7$, etc...

  Los primeros términos de esa progresión son

  $$1, \quad 3, \quad 5, \quad 7, \quad 9, \quad 11$$

2.3. *Término general de una progresión aritmética.*

Sea la progresión aritmética $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n$ de diferencia d.

Por definición de progresión aritmética se tiene:

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d$$

$$a_5 = a_4 + d = a_1 + 3d + d = a_1 + 4d$$

$$a_6 = a_5 + d = a_1 + 4d + d = a_1 + 5d$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

En general, para un término cualquiera, a_n será

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$$

Ejemplo:

- El término general de una progresión aritmética cuyo primer término es 2 y cuya diferencia es 5 es:

  $$a_n = 2 + (n - 1) \cdot 5 = 5n - 3$$

  A partir de esta expresión vamos a calcular los términos a_5, a_6 y a_{12}

  $$a_5 = 5 \cdot 5 - 3 = 22$$
  $$a_6 = 5 \cdot 6 - 3 = 27$$
  $$a_{12} = 5 \cdot 12 - 3 = 57$$

11. De una progresión aritmética se sabe que a_5 es 14 y la diferencia es 6. Halla los diez primeros términos de esa progresión.

12. El primer término de una progresión aritmética de diferencia 2 es 9. ¿Cuál es el término a_{20}?

13. El primer término de una progresión aritmética es 5 y su diferencia -3. ¿Cuál es el término a_6?

14. De una progresión aritmética se sabe

$$a_2 = 8 \quad \text{y} \quad d = 3$$

halla los cinco primeros términos de la progresión.

15. El término a_{10} de una progresión aritmética es 25 y la razón 5. Halla a_1.

16. Halla el primer término de una progresión aritmética sabiendo que

$$a_{11} = 13 \quad \text{y} \quad d = 2$$

Halla el término general de una progresión aritmética sabiendo que

$$a_1 = 3 \quad \text{y} \quad d = 4$$

17. El término sexto de una progresión aritmética es 15 y su diferencia 4. Calcula el término a_{14}.

18. En una progresión aritmética $a_{11} = 35$ y $d = 4$. Calcula a_1 y a_{30}.

2.4. Veamos ahora la expresión del término general en función de un término cualquiera y de la diferencia

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$$
$$a_p = a_1 + (p-1)\cdot d$$

restando se obtiene:

$$a_n - a_p = (n-p)\cdot d$$
$$a_n = a_p + (n-p)\cdot d$$

Ejemplo:

- De una progresión aritmética se conoce el término $a_4 = 14$ y la diferencia $d = 3$. Vamos a calcular el término a_9 aplicando la fórmula anterior

$$a_9 = a_4 + (9-4)\cdot 3 = 14 + 5\cdot 3 = 14 + 15 = 29$$

19. El término quinto de una progresión aritmética de diferencia $d = 4$, es 21. Calcula a_{20} sin obtener previamente a_1.

20. De una progresión aritmética de razón 4 se conoce $a_8 = 33$; calcula a_1.

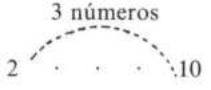
3 Interpolación

3.1. Se conoce con el nombre de interpolación el problema que consiste en intercalar varios números o términos entre dos dados de forma que todos sean términos de una progresión aritmética.

Los términos que se interpolan se llaman, a veces, *medios diferenciales.*

Ejemplo:

- Entre 2 y 10 vamos a interpolar tres números de modo que resulten cinco números en progresión aritmética.



En este caso: $n = 3 + 2 = 5$; $a_1 = 2$; $a_5 = 10$

de $a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$

resulta:

$$d = \frac{a_n - a_1}{n-1} = \frac{10-2}{5-1} = \frac{8}{4} = 2$$

Luego la progresión es: 2, 4, 6, 8, 10, ...

21. Interpola cinco números entre 6 y 30 de tal forma que los siete números estén en progresión aritmética.

22. Interpola un término entre 15 y 25 de tal forma que estén en progresión aritmética.

3.2. En general, para interpolar h términos entre dos dados llamaremos a_1 al primero de éstos y al otro a_{h+2} ya que los h que interpolamos más los dos dados son $h + 2$

$$a_1 \overset{h}{\ldots} a_{h+2}$$

La diferencia de la progresión se halla despejando d de la fórmula

$$a_{h+2} = a_1 + ((h + 2) - 1) \cdot d = a_1 + (h + 1) \cdot d$$

$$d = \frac{a_{h+2} - a_1}{h + 1}$$

a_{h+2} y a_1 son los números dados y h los que se interpolan.

4 Suma de n términos consecutivos

4.1. *Suma de términos equidistantes.*

Consideremos la progresión

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_h, \ldots, a_{h+p}, \ldots, a_{k-p}, \ldots, a_k, \ldots$$

Los términos a_{h+p} y a_{k-p} se dice que equidistan de a_h y a_k.

Probemos que *la suma de dos términos que equidistan de otros dos es igual a la suma de éstos.*

En efecto $a_{h+p} = a_h + (h + p - h) \cdot d = a_h + p \cdot d$

por otra parte $a_k = a_{k-p} + (k - (k - p)) \cdot d = a_{k-p} + p \cdot d$

es decir,

$$a_{h+p} = a_h + p \cdot d$$
$$a_{k-p} = a_k - p \cdot d$$

sumando resulta

$$a_{h+p} + a_{k-p} = a_h + a_k$$

Como consecuencia de esta propiedad resulta: *la suma de dos términos equidistantes de los extremos* (a_1 *y* a_n) *es igual a la suma de éstos*, es decir,

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = a_n + a_{n-3} = \cdots$$

Ejemplo:

- En la progresión 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32, ...

  los términos 5 y 26 equidistan de 11 y 20, por eso

  $$5 + 26 = 11 + 20$$

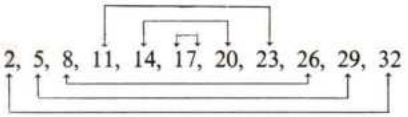
23. En la progresión

7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23

Indica dos términos que equidisten de 9 y 19. ¿Qué propiedad cumplen estos términos?

24. En una progresión aritmética que tiene un número impar de términos, el término central es 15. ¿Cuánto vale la suma de los términos extremos?

Si consideramos como último término de esta progresión 32 se verifica que la suma de los términos que se indican a continuación son iguales.



$$2 + 32 = 5 + 29 = 8 + 26 = 11 + 23 = 14 + 20 = 17 + 17$$

Se observa, que en una progresión aritmética en la que se considera un número impar de términos, el doble del término central es igual a la suma de los extremos

$$2 \cdot 17 = 2 + 32$$

4.2. *Suma de los n primeros términos.*

Consideremos la progresión aritmética $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots$ de diferencia d.

Vamos a calcular la suma de los n primeros términos,

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

se puede escribir también:

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_2 + a_1$$

Sumando estas dos igualdes se obtiene:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \cdots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Estos n paréntesis son todos iguales a $(a_1 + a_n)$, por la propiedad de **4.1.**, luego $2S_n = (a_1 + a_n) \cdot n$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Ejemplo:

- El primer término de una progresión aritmética de diferencia 3 es 2, ¿cuál es la suma de sus 18 primeros términos?

$$S_{18} = \frac{18 \cdot (2 + a_{18})}{2}$$

Pero $\quad a_{18} = a_1 + 17d = 2 + 17 \cdot 3 = 53$

Luego $\quad S_{18} = \frac{18 \cdot (2 + 53)}{2} = 495$

25. Halla la suma de los n primeros términos de la progresión aritmética

$$1, \quad \frac{n-1}{n}, \quad \frac{n-2}{n}, \quad \frac{n-3}{n}$$

26. Halla la suma de todos los números pares de tres cifras.

27. Halla a_4 y a_5 de una progresión aritmética sabiendo que

$$a_8 = 4a \quad \text{y} \quad S_8 = 140$$

28. La suma de cuatro términos consecutivos de una progresión aritmética es 2 y la suma de sus cuadrados 46. Halla dichos términos y la diferencia de la progresión.

29. La suma de n números naturales consecutivos, tomados a partir de 11, es 1.715. Calcula n.

30. ¿Cuántos números impares consecutivos a partir de 1 suman 7.744?

Ejercicios y cuestiones

31. Halla el término 19 y la suma de los 19 primeros términos de la progresión aritmética 5, 8, 11, 14, 17, ...

32. Interpola cuatro medios diferenciales entre -12 y $+13$.

33. En una progresión aritmética la suma del quinto y noveno término es cuatro veces el octavo. Halla los términos citados y la diferencia sabiendo que el primer término es 12.

34. Calcula la suma de los múltiplos positivos de 11 menores que 1.000.

35. ¿Es una progresión aritmética x, $\frac{1}{2}x$, $\frac{1}{4}x$ para todo valor de x? ¿Y para algún valor de x?

36. Las longitudes de los lados de un triángulo están en progresión aritmética. El mayor mide 15 cm y el perímetro es 39. Halla los otros lados.

37. ¿Forman parte de una progresión aritmética las expresiones $a + 2b$, $2a + 4b$, $3a + 6b$, $4a + 8b$? Si $a + 2b$ es el tercer término, calcula el primer término y el noveno.

38. Cuál es la suma de los n primeros números impares.

39. La suma del segundo y undécimo término de una progresión aritmética es 37. El cuarto es 13. Escribe toda la progresión.

40. Escribe tres números en progresión aritmética tal que su suma es 32 y la suma de sus cuadrados 464.

41. La diferencia en la progresión aritmética $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_i, \ldots, a_n, \ldots$ es -3. ¿Cuál de las dos desigualdades siguientes es cierta?

$$a_1 - a_{i+1} > 0 \quad ; \quad a_i - a_{i+1} < 0$$

42. Calcula x para que la sucesión x, x^2, $4x^2$ sea aritmética.

43. Calcula la suma de los números del 1 al 100.

44. ¿Se puede considerar la serie de los números naturales como una progresión aritmética?

45. Si una progresión aritmética tiene término central. ¿Qué se puede decir del número de términos de esta progresión?

46. Calcula el término duodécimo de la sucesión: 1/2, 2, 7/2, ...

47. ¿Cuál es la suma de los n primeros números pares? Como aplicación de la fórmula obtenida calcula la suma de los 200 primeros números pares.

48. Entre las siguientes sucesiones indica las que son progresiones aritméticas:

a) $\frac{-3}{4}, \frac{-1}{4}, \frac{1}{4}, \ldots$ b) $\frac{2}{5}, \frac{-1}{10}, \frac{-6}{10}, \ldots$ c) $\frac{1}{4}, \frac{-5}{4}, \frac{-11}{4}, \ldots$

d) $2, \frac{3}{2}, 1, \ldots$ e) $5, 10, 12, 14, \ldots$ f) $1, 4, 8, \ldots$

En las progresiones aritméticas anteriores calcula:

– los términos a_n, a_7 y a_{10},

– la suma de los diez primeros términos.

Tema 18 PROGRESIONES GEOMETRICAS

Como en las progresiones aritméticas, se inicia el estudio de las progresiones geométricas con la obtención del término general, para estudiar seguidamente el problema de la interpolación; se obtienen después las fórmulas del producto y de la suma de los n primeros términos.

Finalmente, de un modo intuitivo, se propone la fórmula de la suma de los términos de una progresión geométrica decreciente.

Se debe observar que la obtención rigurosa de la fórmula mencionada, supone el empleo de la noción de límite que, se estudia el curso próximo.

1 Progresión geométrica

1.1. Considera la sucesión de números reales

$$2, 6, 18, 54, 162, \ldots \quad [1]$$

El primer término es 2, $a_1 = 2$.

El segundo término es 6, $a_2 = 6$

$$\begin{array}{ccccc} 2 & \times & 3 & = & 6 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ a_1 & \times & 3 & = & a_2 \end{array}$$

El tercer término es 18, $a_3 = 18$

$$\begin{array}{ccccc} 6 & \times & 3 & = & 18 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ a_2 & \times & 3 & = & a_3 \end{array}$$

El cuarto término es 54, $a_4 = 54$

$$\begin{array}{ccccc} 18 & \times & 3 & = & 54 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ a_3 & \times & 3 & = & a_4 \end{array}$$

Cada término de la sucesión [1] *es igual al anterior multiplicado por un número fijo; estas sucesiones, que como la* [1] *se forman con este criterio, se llaman progresiones geométricas.*

El número fijo por el que se multiplica cada término para obtener el siguiente se llama *razón* de la progresión geométrica.

1. Comprueba que en la sucesión [1] $a_5 = 162$ es $a_5 = a_4 \times 3$; $a_4 = 54$. Halla también a_6.

2. ¿Forman los números pares 2, 4, 6, ... una progresión geométrica? ¿Por qué?

3. Escribe los seis primeros términos de una progresión geométrica cuyo primer término sea 3 y su razón sea 2.

1.2. Conocido un término y la razón de una progresión geométrica, se pueden hallar los demás términos.

Ejemplo:

- El término a_3 de una progresión geométrica es 12 y la razón 4; el término a_2 será $12/4 = 3$, ya que $a_3 = a_2 \cdot r$ (r es la razón) de donde $a_2 = a_3/r$.

  El término a_1 es 3/4, pues $a_2 = a_1 \cdot r$.

  El término a_4 es $12 \cdot 4 = 48$, etc...

  La progresión geométrica es:

$$\frac{3}{4}, \quad 3, \quad 12, \quad 48, \quad \ldots$$

1.3. *Término general de una progresión geométrica.*

Sea la progresión geométrica $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots$ de razón r.

Sabemos entonces que

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 \cdot r \\ a_3 &= a_2 \cdot r = a_1 \cdot r \cdot r = a_1 \cdot r^2 \\ a_4 &= a_3 \cdot r = a_1 \cdot r^2 \cdot r = a_1 \cdot r^3 \\ a_5 &= a_4 \cdot r = a_1 \cdot r^3 \cdot r = a_1 \cdot r^4 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

En general, para un término cualquiera a_n será:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

Ejemplo:

- El término general de una progresión geométrica cuyo primer término es 3 y cuya razón es: 2 es $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$.

  A partir de esta expresión vamos a calcular los términos a_3, a_5 y a_6

$$\begin{aligned} a_3 &= 3 \cdot 2^{3-1} = 3 \cdot 2^2 = 3 \cdot 4 = 12 \\ a_5 &= 3 \cdot 2^{5-1} = 3 \cdot 2^4 = 3 \cdot 16 = 48 \\ a_6 &= 3 \cdot 2^{6-1} = 3 \cdot 2^5 = 3 \cdot 32 = 96 \end{aligned}$$

1.4. Veamos ahora la expresión del término general de una progresión geométrica en función de un término cualquiera y de la razón

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 \cdot r^{n-1} \\ a_p &= a_1 \cdot r^{p-1} \end{aligned}$$

dividiendo las dos igualdades anteriores resulta:

$$\frac{a_n}{a_p} = \frac{a_1 \cdot r^{n-1}}{a_1 \cdot r^{p-1}} = r^{(n-1)-(p-1)} = r^{n-p}$$

$$a_n = a_p \cdot r^{n-p}$$

4. El primer término de una progresión geométrica es 128 y la razón 1/2. Halla los seis primeros términos de dicha progresión.

5. De una progresión geométrica se sabe que

$$a_2 = 10 \quad \text{y} \quad r = 5$$

Halla los diez primeros términos de la progresión.

6. Halla la razón de una progresión geométrica sabiendo que 10 y 60 son dos términos consecutivos.

7. Comprueba que si la razón de una progresión es mayor que 1 la sucesión es creciente, es decir, cada término mayor que el anterior. Hazlo con la progresión en la cual

$$a_1 = 2 \quad \text{y} \quad r = 4$$

8. Comprueba que si la razón de una progresión es menor que 1 la sucesión es decreciente, es decir, cada término menor que el anterior. Hazlo con la progresión en la cual

$$a_1 = 24 \quad \text{y} \quad r = \frac{1}{2}$$

9. El término a_1 de una progresión geométrica es 5 y la razón 3. Halla la expresión del término general.

10. El término a_{10} de una progresión geométrica es 1.000 y la razón 5. Halla a_1.

11. El término de lugar 10 de una progresión geométrica de razón 2 es 2.560. Calcula el término a_{14}.

12. En una progresión geométrica

$$a_{11} = 64 \quad \text{y} \quad r = 2$$

Calcula a_1 y a_{12}.

13. El término sexto de una progresión geométrica de razón 1/3 es 1. Calcula a_8 sin obtener previamente a_1.

14. De una progresión geométrica de razón 1/2 se conoce $a_5 = 1/2$. Calcula a_1.

Ejemplo:

- De una progresión geométrica se conoce $a_4 = 40$ y la razón $r = 2$.

  Vamos a calcular el término a_9 aplicando la fórmula anterior

$$a_9 = a_4 \cdot r^{9-4} = 40 \cdot 2^5 = 40 \cdot 32 = 1.280$$

2 Interpolación

2.1. En las progresiones geométricas, también se presenta el problema de la interpolación.

Se trata de intercalar varios números o términos entre dos dados de modo que resulte una progresión geométrica.

Los términos que se interpolan se suelen llamar medios proporcionados o términos geométricos.

Ejemplo:

- Interpola entre 3 y 96, cuatro números de modo que resulte una progresión geométrica

$$\begin{array}{ccc} & 4 \text{ números} & \\ 3 & & 96 \end{array}$$

  En este caso $n = 4 + 2 = 6$, $a_6 = 96$ y $a_1 = 3$ de $a_n = a_1 r^{n-1}$ resulta:

$$96 = 3 \cdot r^{6-1} \Rightarrow r^5 = \frac{96}{3} = 32 \Rightarrow r = \sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2$$

  Luego la progresión es 3, 6, 12, 24, 48, 96.

2.2. En general para interpolar h términos entre dos dados llamaremos a_1 al primero de éstos y al otro a_{h+2}

$$a_1 \overset{h \text{ términos}}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} a_{h+2}$$

La razón de la progresión se halla despejando r en

$$a_{h+2} = a_1 \cdot r^{h+2-1} = a_1 \cdot r^{h+1}$$

$$r = \sqrt[h+1]{\frac{a_{h+2}}{a_1}}$$

15. Interpola tres números entre 3 y 768 de modo que los cinco números estén en progresión geométrica.

16. Interpola un término entre 15 y 135 de modo que resulten tres números en progresión geométrica.

17. Halla un número comprendido entre 6 y 294 tal que 6, x, 294... sea una progresión geométrica.

3 Producto de n términos consecutivos

3.1. *Producto de términos equidistantes.*

Consideremos la progresión geométrica

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_h, \ldots, a_{h+p}, \ldots, a_{k-p}, \ldots, a_k, \ldots$$

Los términos a_{h+p} y a_{k-p} se dice que equidistan de a_h y a_k.

Probemos que *el producto de dos términos que equidistan de otros dos es igual al producto de éstos.*

En efecto:

$$a_{h+p} = a_h \cdot r^{(h+p-h)} = a_h \cdot r^p$$

$$a_k = a_{k-p} \cdot r^{k-(k-p)} = a_{k-p} r^p$$

es decir:

$$a_{h+p} = a_h \cdot r^p$$

$$a_{k-p} = \frac{a_k}{r^p}$$

Multiplicando miembro a miembro resulta:

$$a_{h+p} \cdot a_{k-p} = a_h \cdot a_k$$

Como consecuencia de esta propiedad, resulta que *el producto de dos términos equidistantes de los extremos* (a_1 *y* a_n) *es igual al producto de éstos*, es decir,

$$a_1 \cdot a_n = a_2 \cdot a_{n-1} = a_3 \cdot a_{n-2} = a_4 \cdot a_{n-3} = \cdots$$

Ejemplo:

- En la progresión

  3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384, 768, 1.536, 3.072...

  los términos 6 y 786 equidistan de 24 y 192, por eso

  $$6.786 = 24 \cdot 192 = 4.608$$

  Si consideramos como último término de esta progresión 3.072, se verifica que son iguales el producto de los términos que se indican a continuación

  3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384, 768, 1.536, 3.072

  $3 \cdot 3.072 = 6 \cdot 1.536 = 12 \cdot 768 = 24 \cdot 384 = 48 \cdot 192 = 96 \cdot 96$

Se observa que: *en una progresión geométrica, en la que se considera un número impar de términos, el cuadrado del término central es igual al producto de los extremos.*

18. En la progresión geométrica

2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512...

Indica dos términos que equidisten de 4 y 64. ¿Qué propiedad cumplen estos términos? Indica dos términos que equidisten de 16 y 512.

19. En una progresión geométrica que tiene un número impar de términos, el término central es 48. Calcula el producto de los términos extremos.

3.2. *Producto de los n primeros términos.*

Consideremos la progresión geométrica $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n \ldots$ de razón r.

Vamos a hallar el producto de sus n primeros términos, es decir,

$$P_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3, \ldots, a_{n-2} \cdot a_{n-1} \cdot a_n \quad [1]$$

aplicando la propiedad conmutativa del producto la igualdad anterior, se puede escribir del modo siguiente:

$$P_n = a_n \cdot a_{n-1} \cdot a_{n-2} \ldots a_3 \cdot a_2 \cdot a_1 \quad [2]$$

Multiplicando las dos igualdades, miembro a miembro, resulta

$$P_n^2 = (a_1 a_n) \cdot (a_2 \cdot a_{n-1}) \cdot (a_3 \cdot a_{n-2}) \overset{(n}{\ldots} (a_1 \cdot a_n)$$

Estos n paréntesis son todos iguales a $(a_1 \cdot a_n)$ por la propiedad estudiada en **3.1.**, luego:

$$P_n^2 = (a_1 \cdot a_n) \cdot (a_1 \cdot a_n) \cdot (a_1 \cdot a_n) \ldots (a_1 \cdot a_n)$$

$$P_n^2 = (a_1 \cdot a_n)^n; \qquad P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$$

Ejemplo:

- El primer término de una progresión geométrica es 3 y la razón 2; halla el producto de los siete primeros términos

$$a_7 = a_1 \cdot r^{7-1} = 3 \cdot 2^6 = 3 \cdot 64 = 192$$

$$p_n = \sqrt{(3 \cdot 192)^7} = \sqrt{576^7} = (\sqrt{576})^7 = 24^7$$

20. Halla el producto de los cuatro primeros términos de una progresión geométrica tal que $a_1 = 2$ y $a_4 = 54$.

21. Halla el producto de los cinco primeros términos de una progresión geométrica de razón 2 y $a_1 = 4$.

22. En una progresión geométrica $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 125$. ¿Cuánto vale a_2? (Recuerda la propiedad del término central).

23. De una progresión geométrica se sabe que $a_1 \cdot a_5 = 25$. ¿Cuánto vale a_3?

24. Se tiene una progresión tal que $a_1 \cdot a_3 = 36$ y $a_4 = 24$. ¿Cuánto vale a_5? Observa que

$$a_1 \cdot a_3 = a_1 \cdot a_1 r^2 = a_1^2 r^2 = 36$$

El problema se reduce a resolver el sistema

$$\begin{cases} a_1 r = 6 \\ a_1 r^3 = 24 = a_4 \end{cases}$$

25. Halla la suma de los cinco primeros términos de una progresión geométrica tal que $a_1 = 3$ y $r = 2$.

4 Suma de los n primeros términos

Sea $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$, una progresión geométrica. Vamos a calcular la suma de sus n primeros términos:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \quad [1]$$

Multiplicando por r los dos miembros de esta igualdad se obtiene:

$$r \cdot S_n = a_1 \cdot r + a_2 \cdot r + a_3 \cdot r + \cdots + a_n \cdot r = \\ = a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n \cdot r \quad [2]$$

Hallemos ahora $r \cdot S_n - S_n$

$$r \cdot S_n - S_n = a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n + a_n \cdot r \\ -a_1 - a_2 - a_3 - a_4 \ldots - a_n = -a_1 + a_n \cdot r$$

$$r \cdot S_n - S_n = a_n \cdot r - a_1; \qquad S_n \cdot (r-1) = a_n \cdot r - a_1$$

$$S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1}$$

26. Halla la suma de los seis primeros términos de una progresión geométrica conociendo

$$a_6 = 243 \quad \text{y} \quad r = 3$$

27. Halla la suma de los seis primeros términos de una progresión geométrica sabiendo que

$$a_1 = 2 \quad \text{y} \quad a_3 = 36$$

En ocasiones interesa aplicar la fórmula de la suma en la forma siguiente:

$$S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{a_1 \cdot r^{n-1} \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{r - 1}$$

Ejemplo:

- La suma de los seis primeros términos de una progresión geométrica en la que $a_1 = 2$ y $r = 3$ es

$$S_6 = \frac{a_1 \cdot (r^6 - 1)}{r - 1} = \frac{2 \cdot (3^6 - 1)}{3 - 1} = 728$$

28. La suma de los siete primeros términos de una progresión geométrica es 16.383 y la razón es 4. Halla los siete términos de la progresión.

29. Calcula la suma de los veinte primeros términos de la progresión 3, 6, 12, ...

5 Progresión geométrica decreciente

Una progresión geométrica tal que su razón es $r > 1$ se dice que es *creciente.*

Si $|r| < 1$ se dice que la progresión es *decreciente.* Ahora pretendemos, justificar intuitivamente la fórmula de la suma de los términos de una progresión geométrica decreciente.

Multipliquemos por -1 el numerador y el denominador de la expresión $S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1}$, se tiene:

$$S_n = \frac{a_1 - a_n \cdot r}{1 - r} = \frac{a_1}{1 - r} - \frac{a_1 \cdot r^n}{1 - r}$$

Si $|r| < 1$ será r de la forma $1/x$, con $|x| > 1$, es decir,

$$r = \frac{1}{x}, \quad \text{entonces} \quad r^n = \frac{1}{x^n}$$

Si n es muy grande, $r^n = 1/x^n$ es un número muy próximo a cero. Cuantos más términos se consideren en la sucesión $a_1, a_2, a_3, \ldots$, más se aproximará su suma a, $\frac{a_1}{1 - r}$ por eso, aplicaremos la fórmula $S = \frac{a_1}{1 - r}$

para hallar la suma de los términos de una progresión geométrica decreciente.

30. El primer término de una progresión geométrica de razón 1/3 es 81. Halla la suma de infinitos términos de esa progresión.

31. Halla la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica de razón 1/4 y cuyo primer término es 256.

32. Una rana da saltos en línea recta, hacia adelante, cada vez salta la mitad del salto anterior. Parte del extremo de una charca circular de 5 m de radio. En el primer salto se coloca a 3 m del centro. ¿Llegará la rana al centro del estanque?

Ejemplos:

- Se divide un segmento $\overline{AB}$, de longitud 1, en dos partes iguales. En el segmento $\overline{CB}$, cuya longitud es 1/2, se divide a su vez en dos partes iguales; con el segmento $\overline{DB}$ se hace lo mismo, y se prosigue este proceso de división indefinidamente.

  Las longitudes de los segmentos

  $$\overline{AC},\ \overline{CD},\ \overline{DE},\ \ldots \text{ son } \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \ldots$$

  y su suma debe ser 1.

  $$S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$$

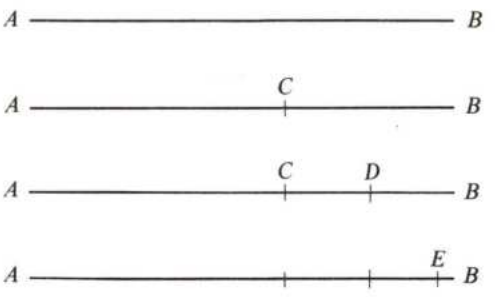
- Vamos a calcular la fracción que representa la expresión decimal periódica $1,\widehat{24}$

  $$1,\widehat{24} = 1,24242424\ldots =$$
  $$= 1 + 0,24 + 0,0024 + 0,000024 + \cdots =$$
  $$= 1 + \frac{24}{10^2} + \frac{24}{10^4} + \frac{24}{10^6} + \cdots$$

  Se observa, que el segundo sumando es el primer término de una progresión geométrica de razón $r = 1/100$.

  Luego su suma será:

  $$1,\widehat{24} = 1 + \frac{\frac{24}{10^2}}{1-\frac{1}{100}} = 1 + \frac{\frac{24}{100}}{\frac{99}{100}} = 1 + \frac{24}{99} = \frac{123}{99} = \frac{41}{33}$$



33. Se ha visto que la fracción 41/33 representa a la expresión decimal periódica $1,\widehat{24}$.

Se dice que 41/33 es la fracción generatriz de dicha exposición decimal periódica.

Calcula ahora la fracción generatriz de

a) $1,\widehat{26}$
b) $1,\widehat{52}$
c) $1,2\widehat{41}$

Observa en c) que

$$1,2\widehat{41} = 1 + 0,2 + 0,041 + 0,00041 + \\ + 0,0000041 + \cdots$$

Ejercicios y cuestiones

34. Halla los términos de una progresión geométrica tal, que la suma de los tres primeros sea 63 y la diferencia entre el tercero y el primero sea igual a 4.

35. Forma una progresión geométrica de cuatro términos si el segundo es 20 y la suma de los cuatro términos 425.

36. La suma de los términos de una progresión geométrica, de razón 3, es 120. La suma de los cuadrados de estos términos es 7.380. Forma la progresión.

37. Entre 8 y 5.832 se interpolan cinco términos que forman con los números dados una progresión geométrica. Calcula el quinto término de esta progresión.

38. La suma de los infinitos términos de una progresión decreciente es 18 y la diferencia de los dos primeros es 2. Encontrar la progresión.

39. La suma de los infinitos términos de una progresión geométrica decreciente es 64. El segundo término es 16. Escribe la progresión.

40. En una progresión geométrica cuyos términos son positivos, cada término es igual a la suma de los dos siguientes. Halla la razón de la progresión.

41. Halla la fracción ordinaria generatriz (simplificada) de la expresión decimal 3,2781, aplicando la fórmula para hallar la suma de los términos de una progresión geométrica ilimitada.

42. Un campesino propone a otro utilizar durante treinta días una pequeña parcela de su propiedad, prometiendo hacerle en ella algunas mejoras. Se propone pagarle una peseta el primer día, dos el segundo, tres el tercero, y así sucesivamente por el uso de la parcela; en cambio, el propietario le dará 0,1 peseta el primer día, 0,2 el segundo, 0,3 el tercero, y así sucesivamente hasta el último día por las mejoras introducidas. Halla el resultado de la liquidación, una vez pasados los treinta días.

43. La suma de todos los términos de una progresión geométrica indefinida es 5. ¿Cuánto vale la razón? ¿Y cuánto la suma de sus cinco primeros términos?

44. Halla el valor de cada uno de los ángulos de un cuadrilátero, sabiendo que forman progresión geométrica, y que el cuarto es igual a nueve veces el segundo.

45. Halla los ángulos de un triángulo rectángulo cuando los tres forman progresión geométrica.

46. Se da un triángulo equilátero de lado a. Unimos los puntos medios de los lados de ese triángulo y análogamente los del triángulo que resulta prolongando este proceso indefinidamente. Calcula el límite de la suma de los perímetros de la sucesión de triángulos así obtenida.

47. Entre las siguientes sucesiones indica las que son progresiones geométricas:

a) $2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27} \ldots$

b) $3, \frac{10}{3}, \frac{11}{3}, \frac{12}{3} \ldots$

c) $2, 4, 12, 24, 36 \ldots$

d) $5, 10, 20, 40, 80 \ldots$

e) $1, \frac{5}{2}, \frac{25}{4}, \frac{125}{8} \ldots$

f) $5, 1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125} \ldots$

En las progresiones geométricas crecientes calcula:

– los términos a_n, a_7, a_{10},
– la suma de los 10 primeros términos.

En las progresiones geométricas decrecientes halla la suma de todos sus términos.

Tema 19

INTERES COMPUESTO Y ANUALIDADES

Tradicionalmente, el estudio del interés compuesto y de las anualidades se hacía mediante el empleo de tablas de logaritmos; la complicación que supone el manejo de las tablas, junto con el gran número de operaciones que había que realizar, hacían que el estudio de estas cuestiones, que desde el punto de vista de su aplicación a la vida cotidiana tienen una importancia innegable, se hiciera enojoso.

Lo ideal sería que se dispusiera de una máquina de calcular para realizar rápidamente las operaciones, en su defecto, se puede utilizar la tabla que hay al final del tema; en ella se encuentran calculadas las sucesivas potencias del binomio $(1 + r)^t$ *para algunos valores de* r *y de* t.

1 Interés simple

1.1. Supongamos que tenemos un capital de C pesetas y que lo prestamos o lo colocamos en un banco. Por cada 100 pesetas nos dan R pesetas en un año. Estas R pesetas es lo que se llama *rédito* o tanto por ciento; un rédito del 5 % indica que 100 pesetas en un año rentan 5.

Si por 100 pesetas se obtienen R de beneficio, la ganancia que corresponde a 1 peseta es $\frac{R}{100}$. Si por 1 peseta se obtienen $\frac{R}{100}$ en un año, por un capital de C pesetas se obtendrán $C \cdot \frac{R}{100}$

En t años, tendremos

$$C \cdot \frac{R}{100} \cdot t$$

Este es el interés que producen C pesetas al R por ciento durante t años. Se llama interés simple

$$I = \frac{C\,R\,t}{100}$$

1.2. Hemos dicho que 1 peseta en un año produce $\frac{R}{100}$; en un mes producirá $\frac{R}{100} : 12$, es decir, $\frac{R}{1.200}$.

Con lo cual el interés simple que producen C pesetas en m meses es:

$$I = \frac{C\,R\,m}{1.200}$$

1. ¿Cuántos años tardará en duplicarse un capital invertido al 5 por 100 de interés simple?

2. Un señor tiene 7.000.000 de pesetas en un banco a un rédito del 5 por 100. Para sus gastos retira todos los años los intereses que le produce el capital. ¿Qué dinero retira al año?

1.3. Una peseta en un año se convierte en $\frac{R}{100}$. En un día se convertirá en $\frac{R}{100} : 360$, es decir, en $\frac{R}{36.000}$ pesetas.

Con lo cual el interés simple que producen C pesetas en d días es:

$$I = \frac{CRd}{36.000}$$

1.4. El capital final que se tiene al cabo de t año es el que se tenía más los intereses que ha producido

$$C_t = C + I$$

$$C_t = C + \frac{CRt}{100} = \frac{100C + CRt}{100} = \frac{C(100 + Rt)}{100}$$

Ejemplos:

- Si el capital y los intereses producidos en tres años al 5 por 100 ascienden a 1.150 pesetas el capital será

$$C_t = \frac{100C}{100 + Rt} \quad \frac{115.000}{100 + 15} = \frac{115.000}{115} = 1.000 \text{ pesetas}$$

- Un señor ingresa en un banco 50.000 pesetas al 4 por 100 de rédito. Si las retira al cabo de un año, ¿cuánto dinero tiene?

$$I = \frac{50.000 \cdot 4 \cdot 1}{100} = 2.000 \text{ pesetas}$$

Al año tiene 52.000 pesetas.

¿Y si las retira a los siete meses?

$$I = \frac{50.000 \cdot 4 \cdot 7}{1.200} = 1.166,66$$

A los siete meses tiene 51.166,66 pesetas.

¿Y si las retira a los 45 días?

$$I = \frac{\cancel{50.000} \cdot 4 \cdot 45}{\cancel{36.000}} = 250$$

A los 45 días tiene 50.250 pesetas.

3. ¿A qué tanto por ciento de interés simple hay que prestar un capital de 40.000 pesetas para que en tres años se conviertan en 48.000?

4. ¿Cuánto producen 500.000 pesetas a intereses simples del 4 por 100 durante tres años? ¿Y durante cinco meses? ¿Y durante cincuenta días?

5. ¿Cuánto tiempo hay que tener 50.000 pesetas al 3 por 100 de interés simple para que se conviertan en 60.000?

6. Un capital, junto con sus intereses simples de tres años al 5 por 100 asciende a 69.900 pesetas. ¿Cuál es este capital?

7. ¿Cuánto tiempo tarda en triplicarse un capital al 5 por 100 de interés simple? ¿Y en quintuplicarse?

8. Un capital de 60.000 pesetas está produciendo durante noventa días al 6 por 100. ¿cuál es el interés?

2 Interés compuesto

Si se tienen C pesetas prestadas o colocadas en un banco, generalmente no se retiran los intereses que producen en un año sino que se acumulan al capital.

Así C pesetas en el primer año producen

$$I_1 = \frac{CR}{100}$$

Si hacemos $\frac{R}{100} = r$, resulta: $I_1 = C\,r$.

El capital al finalizar el primer año es:

$$C_1 = C + I_1 = C + Cr = C(1 + r)$$

Al finalizar el segundo año el capital será $C_2 = C_1 + I_2$, donde I_2, son los intereses producidos por C_1 durante el segundo año.

$$I_2 = C_1 r = C(1 + r)r$$
$$C_2 = C_1 + I_2 = C(1 + r) + C(1 + r)r$$

Sacando factor común $C(1 + r)$ resulta:

$$C_2 = C(1 + r)(1 + r) = C(1 + r)^2$$

Al final del tercer año el capital será:

$C_3 = C_2 + I_3$, donde I_3 son los intereses producidos por C_2 durante el tercer año.

$$I_3 = C_2 r = C(1 + r)^2 r$$
$$C_3 = C_2 + I_3 = C(1 + r)^2 + C(1 + r)^2 r = $$
$$= C(1 + r)^2(1 + r) = C(1 + r)^3$$

Se observa que:

En el 1.^{e} año el capital C se convierte en $C(1 + r)$
En el 2.º año el capital C se convierte en $C(1 + r)^2$
En el 3.e año el capital C se convierte en $C(1 + r)^3$

Generalizando, en t años C se convierte en $C(1 + r)^t$, es decir, al cabo de t años se tiene un capital C_t

$$C_t = C(1 + r)^t$$

Ejemplo:

- ¿En cuánto se convertirán 50.000 pesetas, prestadas durante cinco años, al 5 por 100 de interés compuesto?

$$C_5 = C(1 + r)^5 \quad ; \quad r = \frac{5}{100} = 0{,}05$$

$$C_5 = 50.000(1 + 0{,}5)^5 = 50.000 \cdot 1{,}05^5$$

$1{,}05^5 = 1{,}2762$ (ver tabla al final de este tema)

$$C_5 = 50.000 \times 1{,}2762 = 63.810 \text{ pesetas}$$

9. Un capital de 50.000 pesetas se coloca al 4 por 100 de interés compuesto durante siete años. ¿Qué capital se forma?

10. ¿A qué tanto por ciento de interés compuesto ha de colocarse un capital de 25.000 pesetas para que en dos años se convierta en 27.562,50 pesetas?

11. ¿Qué capital al 4 por 100 de interés compuesto se convierte a los tres años en 1.536.426 pesetas.

12. Un señor ingresa en un banco 500.000 pesetas. Los intereses se acumulan al capital. El banco le da un rédito del 6 por 100. ¿Cuál es el capital que reúne en seis años?

13. ¿En cuánto se convierten 200.000 pesetas durante diez años al 4 por 100 de interés compuesto.

14. Un cierto capital produce intereses compuestos durante doce años al 5 por 100. El capital al cabo de estos doce años es de 732.000 pesetas. ¿Cuál era el capital inicial?

15. Halla el capital que se forma al pagar una anualidad de 60.000 pesetas durante diez años al 6 por 100.

3 Anualidades

3.1. Se llaman *anualidades a unos pagos que se hacen cada año, bien para formar un capital (anualidades de capitalización) o bien para amortizar una deuda (anualidades de amortización).*

Anualidades { De capitalización / De amortización

3.2. *Anualidades de capitalización.*

Se quiere formar un capital C en t años. Para ello se entrega cada año una anualidad que llamaremos a.

Las primeras a pesetas que se entregan para formar el capital C, están colocadas durante t años produciendo interéses compuestos que al R por ciento se convierten en:

$$a\left(1+\frac{R}{100}\right)^t$$

es decir, $a(1+r)^t$ siendo $r=\dfrac{R}{100}$ (r = tanto por uno).

Al final del primer año se entrega otra anualidad a que esta produciendo intereses compuestos durante $t-1$ años con lo que se convierte en $a(1+r)^{t-1}$.

Al final del segundo año se entrega otra anualidad a que produce intereses durante $t-2$ años convirtiéndose en $a(1+r)^{t-2}$.

Y así sucesivamente, la penúltima anualidad produce intereses durante dos años y la última durante un año.

Luego el capital que se forma a los t años es:

$$C = a(1+r)^t + a(1+r)^{t-1} + a(1+r)^{t-2} + \cdots + a(1+r)^2 + a(1+r)$$

$$C = a(1+r) + a(1+r)^2 + \cdots + a(1+r)^{t-2} + a(1+r)^{t-1} + a(1+r)^t$$

El segundo miembro de la última igualdad es la suma de t términos de una progresión geométrica cuyo primer término es $a(1+r)$ y de razón $1+r$ con lo cual aplicando la fórmula

$$S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r-1}$$

se obtiene:

$$C = \frac{a(1+r)^t \cdot (1+r) - a(1+r)}{1+r-1}$$

sacando $a(1+r)$ factor común

$$C = \frac{a(1+r)[(1+r)^t - 1]}{r}$$

Ejemplo:

- Queremos formar un capital de 2.500.000 pesetas en doce años. ¿Cuánto hemos de entregar al banco cada año si el rédito es del 6 por 100?

$$2.500.000 = \frac{a(1+0{,}06)\,[(1+0{,}06)^{12}-1]}{0{,}06}$$

Haciendo las operaciones resulta:

$$a = \frac{2.500.000 \times 0{,}06}{1{,}06 \times 1{,}0121} = 139.817{,}64$$

Anualidades de Capitalización

1.ª	2.ª ...	Penúltima $t-1$	Ultima t
a	a	a	a
se convierte en			
$a(1+r)^t$	$a(1+r)^{t-1}$ ...	$a(1+r)^2$	$a(1+r)$

16. Un señor deposita cada año en un banco 35.000 pesetas. El banco paga un rédito del 5 por 100. ¿Cuánto dinero tiene al cabo de trece años?

17. Un señor quiere formar un capital de 3.000.000 pesetas en doce años. ¿Cuánto ha de entregar al banco anualmente si éste le da un rédito del 5 por 100?

18. Un señor pretende formar un capital de 2.000.000 de pesetas durante diez años. Si el banco le paga un 6 por 100 de interés compuesto. ¿Qué cantidad debe pagar cada año?

3.3. *Anualidades de amortización.*

Tenemos una deuda de D pesetas a pagar en t años. Al final del primer año se pagan a pesetas, las cuales están produciendo intereses a favor del deudor durante $t-1$ años convirtiéndose en $a(1+r)^{t-1}$. Al final del segundo año se paga otra anualidad a que produce intereses durante $t-2$ años convirtiéndose en $a(1+r)^{t-2}$.

Cuando falta un año para la fecha de vencimiento de la deuda se paga una anualidad a que produce intereses durante un año convirtiéndose en $a(1+r)$.

Al pagar la última anualidad se salda la deuda. La deuda junto con lo que produce en t años al tanto por uno r debe ser igual a la suma de las anualidades junto con los intereses que éstas han producido. Es decir,

$$D(1+r)^t = a + a(1+r) + \cdots + a(1+r)^{t-3} + \\ + a(1+r)^{t-2} + a(1+r)^{t-1}$$

Como el segundo miembro es la suma de t términos de una progresión geométrica de razón $1+r$, cuyo primer término es a, resulta:

$$D(1+r)^t = \frac{a(1+r)^{t-1}(1+r) - a}{1+r-1} = \\ = \frac{a(1+r)^t - a}{r} = \frac{a[(1+r)^t - 1]}{r}$$

$$D = \frac{a[(1+r)^t - 1]}{r(1+r)^t}$$

Ejemplo:

- Un señor pide un préstamo de 500.000 pesetas para devolver en cinco años. ¿Qué cantidad ha de devolver cada año si el tanto por ciento es $R = 8$?

  Se tiene:

$$r = \frac{R}{100} = \frac{8}{100} = 0{,}08$$

$$D = \frac{a((1+0{,}08)^5 - 1)}{0{,}08(1+0{,}08)^5}$$

$$500.000 = \frac{a(1{,}08^5 - 1)}{0{,}08 \cdot 1{,}4693} = \frac{a(1{,}4693 - 1)}{0{,}08 \cdot 1{,}4693} = \frac{a \cdot 0{,}4693}{0{,}08 \cdot 1{,}4693}$$

  Despejando a se tiene:

$$a = \frac{500.000 \cdot 0{,}08 \cdot 1{,}4693}{0{,}4693} = 125.233{,}32$$

Anualidades de Amortización

1.ª	2.ª ...	Penúltima $t-1$	Ultima t
a	a	a	a
se convierten en			
$a(1+r)^{t-1}$	$a(1+r)^{t-2}$...	$a(1+r)$	a

20. ¿Qué anualidad se ha de pagar para amortizar en diez años una deuda de 1.200.000 pesetas al 7 por 100?

¿Qué cantidad se ha de pagar anualmente para amortizar una deuda de 800.000 pesetas en seis años al 8 por 100?

21. Para pagar una deuda de D pesetas al 9 por 100 en seis años un señor paga al año 236.506,37 pesetas. ¿Cuál era la cuantía de la deuda?

22. Despeja a, en la fórmula de las anualidades de amortización.

23. ¿Cuánto tiempo está produciendo la penúltima anualidad?

a) En las anualidades de capitalización.

b) En las anualidades de amortización.

24. En cuatro años se ha de amortizar una deuda de 1.000.000 de pesetas si el tanto por ciento es 7. ¿Qué cantidad se ha de pagar cada año?

Ejercicios y cuestiones

25. ¿Qué produce más? Un capital colocado a interés simple o a interés compuesto.

26. Al comprar una máquina nos dan las siguientes facilidades: abonar en el acto 30.000 pesetas, transcurrido un año 40.000 pesetas y al finalizar el segundo año 50.000 pesetas. Sabiendo que la operación está calculada al 6 por 100 determinar el precio al contado de la máquina.

27. Calcula el tanto por ciento a que se ha de imponer un capital de 60.000 pesetas para que en dos años, a interés compuesto, se convierta en 66.150 pesetas.

28. El capital de una persona se divide en dos partes iguales. Se coloca cada parte a interés compuesto al 6 por 100 y al 3 por 100 respectivamente, durante dos años. Se obtiene así una diferencia entre los capitales finales de 3.000 pesetas. ¿Cuál es el capital primitivo?

29. ¿Qué cantidad anual hay que pagar para amortizar en cinco años una deuda de 80.000 pesetas fijando el 5 por 100 como interés?

30. Calcula la anualidad que ha de pagarse durante ocho años para amortizar una deuda de 200.000 pesetas al 4,5 por 100 de interés.

31. Un capital con sus intereses simples de tres años al 5 por 100 importa 152,50 pesetas menos que unido a sus intereses compuestos en las mismas condiciones. Calcula el capital inicial.

32. Calcula de la anulaidad que es necesario abonar para extinguir una deuda de 235.000 pesetas en diez años al 4 por 100.

33. Calcula el tanto por ciento de interés anual de un capital que en cuatro años ha producido la cuarta parte de su valor, a interés simple.

34. Con dos anualidades de 80.000 pesetas se ha amortizado un capital de 156.080 pesetas, ¿cuál es el tanto por ciento de interés?

35. Calcula de la anualidad que es necesario abonar para extinguir una deuda de 235.000 pesetas en diez años al 4 por 100.

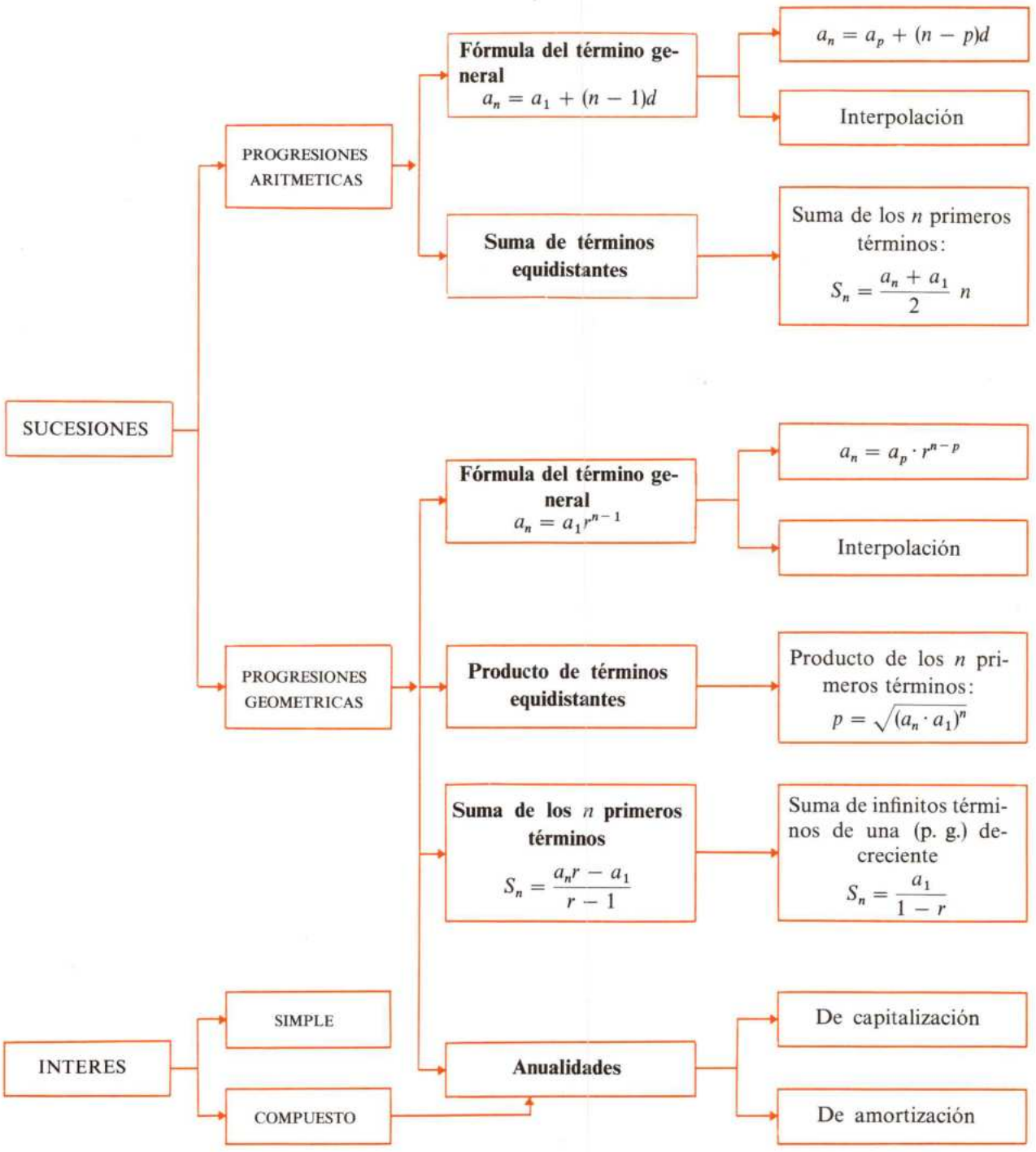
36. Se toman a préstamo 10.000 pesetas y se pagan en dos anualidades de 5.276 pesetas cada una. Halla el tanto por ciento a que se ha tomado el préstamo.

37. Un capital de 40.000 pesetas colocado a interés compuesto se convierte el cabo de dos años en 43.681 pesetas. ¿A qué tanto por ciento se ha colocado?

			Tiempo en años												
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
R %	r	1 + r	$(1+r)^1$	$(1+r)^2$	$(1+r)^3$	$(1+r)^4$	$(1+r)^5$	$(1+r)^6$	$(1+r)^7$	$(1+r)^8$	$(1+r)^9$	$(1+r)^{10}$	$(1+r)^{11}$	$(1+r)^{12}$	$(1+r)^{13}$
1	0,01	1,01	1,01	1,0201	1,0503	1,0406	1,0510	1,0415	1,0721	1,0828	1,0936	1,1046	1,1156	1,1268	1,1580
2	0,02	1,02	1,02	1,0404	1,0612	1,0881	1,1040	1,1261	1,1486	1,1716	1,1950	1,2189	1,2433	1,2682	1,2936
3	0,03	1,03	1,03	1,0609	1,0927	1,1255	1,1592	1,1740	1,2298	1,2667	1,3047	1,3439	1,3842	1,4257	1,4685
4	0,04	1,04	1,04	1,0816	1,1248	1,1692	1,2166	1,2653	1,3159	1,3685	1,4233	1,4802	1,5394	1,6010	1,6650
5	0,05	1,05	1,05	1,1025	1,1576	1,2155	1,2762	1,3401	1,4071	1,4774	1,5513	1,6288	1,7103	1,7958	1,8856
6	0,06	1,06	1,06	1,1236	1,1910	1,2624	1,3382	1,4185	1,5036	1,5938	1,6894	1,7908	1,8982	2,0121	2,1329
7	0,07	1,07	1,07	1,1449	1,2250	1,3107	1,4025	1,5007	1,6057	1,7181	1,8384	1,9671	2,1048	2,2521	2,4098
8	0,08	1,08	1,08	1,1664	1,2597	1,3604	1,4693	1,6868	1,7138	1,8509	1,9990	2,1589	2,3316	2,5181	2,7196
9	0,09	1,09	1,09	1,1881	1,2950	1,4115	1,5386	1,6771	1,8280	1,9925	2,1718	2,3673	2,5804	2,8126	3,0658
10	0,1	1,1	1,1	1,1	1,331	1,4641	1,6105	1,7715	1,9487	2,1435	2,3579	2,3937	2,8531	3,1384	3,4522
11	0,11	1,11	1,11	1,2321	1,3676	1,5180	1,6850	1,2704	2,0761	2,3045	2,5580	2,8394	3,1517	3,4984	3,8832
12	0,12	1,12	1,12	1,2544	1,4049	1,5735	1,7623	1,9738	2,210	2,4759	2,7730	3,1058	3,4785	3,8959	4,3634
13	0,13	1,13	1,13	1,2769	1,4723	1,6304	1,8424	2,0819	2,3526	2,6584	3,0040	3,3945	3,8358	4,3345	4,8980
14	0,14	1,14	1,14	1,2996	1,4815	1,6889	1,9254	2,9949	2,5022	2,8525	3,2519	3,7072	4,2262	4,8179	5,4924
15	0,15	1,15	1,15	1,3225	1,5208	1,7490	2,0113	2,3130	2,660	3,0590	3,5178	4,0455	4,6523	5,3502	6,1527

DIAGRAMA ESTRUCTURAL DE LA UNIDAD

PROGRESIONES



Unidad 8

ESTADISTICA

El objeto de la Estadística lo constituyen los fenómenos aleatorios o de azar; pero el estudio estadístico de un fenómeno supone que se prescinde de lo individual y de los casos aislados para detenerse en el conjunto; por esta razón las proposiciones de la Estadística se refieren la mayor parte de las veces a conjuntos, así pues, la siguiente afirmación es estadística: *El* 50 *por* 100 *de las veces que se lance una moneda en un número grande de experiencias obtendremos cruz;* sin embargo, en una experiencia concreta no es posible «a priori» conocer el resultado.

También es objeto de la Estadística inferir el comportamiento futuro de ciertos fenómenos mediante el conocimiento actual de los mismos.

En el primer tema de esta Unidad, se estudian algunos fenómenos aleatorios y se establece el concepto de probabilidad.

En el segundo, se estudia la variable aleatoria y los parámetros estadísticos.

Tema 20

1. Fenómenos y experimentos aleatorios.
2. Espacio muestral *E*.
3. Espacio de sucesos.
4. Algebra de Boole de los sucesos.
5. Frecuencias.
6. Propiedades de las frecuencias.
7. Probabilidad: Definición.
8. Probabilidad: Propiedades.
9. Probabilidad del suceso intersección.

Tema 21

1. Variable aleatoria.
2. Distribución de frecuencias de una variable aleatoria.
3. Representación gráfica de una distribución de frecuencias.
4. Medidas de centralización.
5. Media aritmética.
6. Mediana.
7. Moda.
8. Medidas de dispersión.

Tema 20

PROBABILIDAD

Se inicia este tema con el estudio de ciertos fenómenos aleatorios típicos. El lanzamiento de una moneda o de un dado y la extracción de una carta de la baraja son fenómenos aleatorios.

A continuación se establece que el conjunto de los sucesos relativos a un fenómeno aleatorio, con las operaciones que en él se definen, es un álgebra de Boole.

Después de estudiar las propiedades de las frecuencias, se hace observar que las frecuencias relativas de un suceso tienden a estabilizarse cuando se realiza un número grande de pruebas.

Esta regularidad de las frecuencias de un suceso conduce al concepto de probabilidad.

1 Fenómenos y experimentos aleatorios

1.1. Se dice que un experimento es aleatorio, estocástico o estadístico, si, pudiéndose repetir indefinidamente en análogas condiciones es imposible predecir el resultado, aun conociendo las condiciones iniciales.

Ejemplos:

Son experimentos aleatorios.

- La extracción de una carta de la baraja.
- El lanzamiento de un dado.
- La extracción de una bola del bombo de la lotería.
- La tirada de una moneda al aire para ver si sale cara o cruz.

No son experimentos aleatorios:

- El resultado de una reacción química.
- La velocidad de llegada de un cuerpo a tierra al dejarlo caer de una torre.

En un experimento aleatorio no conocemos el resultado hasta que se ha realizado la prueba.

1. Enuncia un experimento aleatorio asociado a los siguientes campos:

a) Sociología.
b) Tráfico.
c) Economía.
d) Medicina.
e) Ingeniería.

2. Cita algún experimento que no sea aleatorio correspondiente a algunos de los campos del ejercicio **1**.

2 Espacio muestral

El conjunto de todos los resultados posibles a que puede dar lugar un experimento aleatorio se llama «espacio muestral». Se designa por E.

Si lanzamos un dado al aire y anotamos el número que sale los resultados posibles son: 1, 2, 3, 4, 5, 6.

El espacio muestral es: $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

El espacio muestral, asociado al experimento aleatorio de lanzar una moneda, es: $E = \{c, x\}$.

El espacio muestral relativo al experimento de lanzar un dado de quinielas es: $E = \{1, x, 2\}$.

Los resultados individuales que constituyen el espacio muestral se conocen como *puntos muestrales.*

Un espacio muestral E es finito, cuando card (E) es finito; en caso contrario se llama infinito.

Aquí consideraremos sólo espacios muestrales finitos.

c x

$E = \{c, x\}$

3. Halla el espacio muestral de los resultados posibles de dos partidos de fútbol.

4. ¿Cuál es el espacio muestral asociado al experimento de lanzar dos monedas al aire?

3 Espacio de sucesos

3.1. Dado un experimento aleatorio cuyo espacio muestral es E, se llama *suceso a cada uno de los subconjuntos de E.*

Un subconjunto que contiene un solo punto muestral se denomina *suceso elemental.*

Sea $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ el espacio muestral asociado al experimento aleatorio de lanzar un dado:

5 es un *punto muestral;* $\{1, 3, 5\}$ es *suceso;*

$\{4\}$ es un *suceso elemental*

El suceso de «salir par» es: $P = \{2, 4, 6\}$

El suceso de «salir impar» es: $I = \{1, 3, 5\}$.

En el espacio muestral $E = \{c, x\}$ asociado al experimento de lanzar una moneda, los sucesos son:
$\varnothing$: No salir ni cara ni cruz;
$\{c\}$: Salir cara; $\{x\}$: Salir cruz;
$\{c, x\}$: Salir cara o cruz.
El suceso $\varnothing$ se llama *suceso imposible.*
El suceso E se llama *suceso seguro.*

A partir del espacio muestral E hemos obtenido el conjunto de los sucesos de E, es decir, $\mathscr{P}(E)$. Al conjunto $\mathscr{P}(E)$ se llamará *espacio de sucesos.*

E

1	2	3
4	5	6

5. El espacio muestral que resulta al lanzar dos monedas es: $E = \{cc,\ cx,\ xc,\ xx\}$

Escribe los sucesos posibles.

6. Dado el espacio muestral

$E = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$

¿Cuántos sucesos hay?

Calcula card$(\mathscr{P}(E))$.

3.2. *Se dice que se realiza un suceso A de $\mathscr{P}(E)$, cuando al efectuar una prueba del experimento aleatorio obtenemos como resultado uno de los puntos muestrales que componen el suceso A.*

El suceso «sacar par» al tirar un dado se realiza si sale el punto 2, el 4 o el 6.

El suceso $\varnothing$ no se realiza nunca. El suceso E se realiza siempre.

3.3. Se estudió en el tema 6 que el número de subconjuntos de un conjunto finito, U, es:

$$\text{card}\,(\mathscr{P}(U)) = 2^{\text{card}(U)}$$

Luego el número de sucesos del espacio muestral E es:

$$\text{card}\,(\mathscr{P}(E)) = 2^{\text{card}(E)}$$

7. Haz un diagrama en árbol para obtener el espacio muestral del experimento consistente en tirar una moneda y un dado.

4 Algebra de Boole de los sucesos

Como los sucesos son subconjuntos del espacio muestral, podemos definir entre ellos las mismas operaciones y relaciones que se definen en $\mathscr{P}(E)$; sólo varía el lenguaje.

4.1. Se dice que el suceso C es la *unión de los sucesos A y B de $\mathscr{P}(E)$, si se realiza C siempre que se realiza al menos unos de los sucesos A o B.*

Se escribe: $A \cup B = C$.

También se designa por $C = A$ o B.

Ejemplos:

Sean A y B los sucesos siguientes:

- A es el suceso de sacar un múltiplo de 2 al tirar un dado:

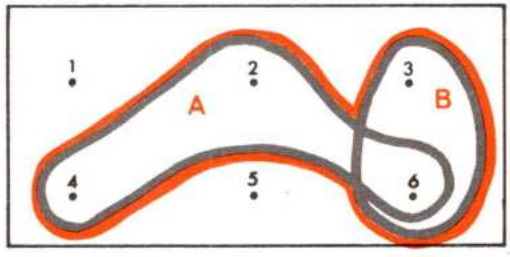
$$A = \{2, 4, 6\}$$

B es el suceso de sacar un múltiplo de 3 al tirar el mismo dado:

$$B = \{3, 6\}$$
$$A \text{ o } B = A \cup B = \{2, 3, 4, 6\}$$

- El suceso «sacar cara o cruz» al tirar una moneda es el suceso seguro.

8. Recordando las propiedades de la unión de conjuntos, enuncia las propiedades de la unión de sucesos.



$A = \{2, 4, 6\}, \quad B = \{3, 6\}$

$A \cup B = \{2, 3, 4, 6\}$

4.2. Se dice que el suceso C es la *intersección de los sucesos* A y B de $\mathcal{P}(E)$, *si se realiza* C *siempre que se realizan los sucesos* A *y* B.

Se escribe: $A \cap B = C$.

También se designa por: A y $B = C$.

Dos sucesos A y B cuyo intersección es el suceso imposible se llaman *sucesos incompatibles.*

Ejemplos:

- Sean $A = \{2, 4, 6\}$ y $B = \{3, 6\}$ los sucesos señalados en **4.1.** Entonces

$$A \cap B = \{2, 4, 6\} \cap \{3, 6\} = \{6\}$$

es decir, obtener múltiplo de 2 y de 3 al tirar un dado es obtener un 6 en la tirada.

- Consideremos ahora los sucesos A y B siguientes:

A es el suceso de sacar par al tirar un dado: $A = \{2, 4, 6\}$.
B es el suceso de sacar impar $B = \{1, 3, 5\}$.
El suceso $A \cap B = \varnothing$, es el suceso imposible.

4.3. Se dice que el suceso $\bar{A}$ de $\mathcal{P}(E)$ es el *suceso contrario* de A *si se realiza* $\bar{A}$ *siempre que no se realiza* A.

Se verifica: $A \cap \bar{A} = \varnothing$ y $A \cup \bar{A} = E$

Ejemplo:

- Lanzamos un dado al aire.

A es el suceso de «sacar par».
B es el suceso de «sacar impar».
A y B son sucesos contrarios.

es decir, $\bar{A} = B$ y $\bar{B} = A$

Ejemplo:

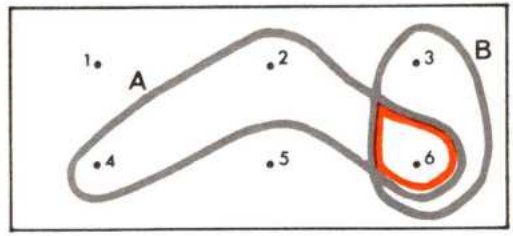
- Lanzamos dos monedas al aire. Si A es el suceso de sacar una sola cara $\bar{A}$ es el suceso de sacar dos caras o dos cruces.

$A = \{cx, xc\}$, $\bar{A} = \{cc, xx\}$ A y $\bar{A}$ son sucesos contrarios.

Dos *sucesos contrarios* son incompatibles.

Dos *sucesos incompatibles* no son en general contrarios.

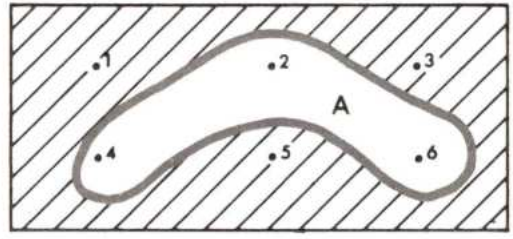
4.4. Se dice que el suceso A implica el suceso B, o que A es subconjunto de B, y se escribe $A \subset B$ *cuando se realiza* B *siempre que se realice* A.



$A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{3, 6\}$

$A \cap B = \{6\}$

9. Di dos sucesos incompatibles con el suceso «sacar dos caras» al tirar dos monedas.



$A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 4, 6\}$

$\bar{A} = B$, $\bar{B} = A$

A y B son sucesos contrarios.

10. ¿Cuál es el suceso contrario de sacar múltiplo de 3 al tirar un dado?

En el espacio muestral relativo al experimento de lanzar dos dados se consideran los sucesos: A «obtener en el primer dado número impar y en el segundo número par». B: «obtener entre los dos dados ocho puntos».
¿Son A y B incompatibles?
¿Son contrarios?

Consideremos de nuevo el experimento que consiste en lanzar un dado y los sucesos A y B siguientes:

A es el suceso de obtener múltiplo de 2
$B = \{2, 4\}$

En este caso B es subconjunto de A: $B \subset A$

Puesto que los sucesos son subconjuntos del espacio muestral E, las operaciones con sucesos verifican todas las propiedades de las operaciones definidas en $\mathscr{P}(E)$, es decir:

$(\mathscr{P}(E), \cup, \cap)$ es un *álgebra* de Boole.

4.5. A continuación, se pone de manifiesto la equivalencia entre las definiciones y operaciones del álgebra de sucesos y el álgebra de conjuntos.

LENGUAJE DEL ALGEBRA DE CONJUNTOS	LENGUAJE DEL ALGEBRA DE SUCESOS
1. Conjunto E referencial o universal	Espacio muestral o universo E
2. Elemento de E	Punto muestral de E
3. Subconjunto de E	Suceso de E
4. Conjunto vacío	Suceso imposible
5. Conjunto unitario	Suceso elemental
6. Conjunto total E	Suceso cierto o seguro
7. Partes de E	Espacio de sucesos
8. Unión de conjuntos: $A \cup B$	Unión de sucesos: A o B
9. Intersección de conjuntos: $A \cap B$	Intersección de sucesos: A y B
10. Subconjuntos disjuntos	Sucesos incompatibles
11. Inclusión de conjuntos	Implicación de sucesos
12. Conjunto complementario	Suceso contrario
13. Algebra de Boole de conjuntos	Algebra de Boole de sucesos

5 Frecuencias

5.1. Consideremos el experimento aleatorio consistente en lanzar al aire un dado.

Sea el suceso $A = \{2, 4, 6\}$ de sacar un número par. Si hacemos 100 pruebas y obtenemos que el suceso A se ha realizado 52 veces, el número 52 se llama *frecuencia absoluta del suceso A*.

En muchas ocasiones no es suficiente conocer la frecuencia absoluta de un suceso; así es muy distinto obtener el suceso A 52 veces en 100 pruebas que en 200.

Podemos dar como una cierta medida del suceso A; para ello se define la frecuencia relativa de un suceso como el cociente de la frecuencia absoluta por el número de pruebas.

El cociente 52/100 se llama *frecuencia relativa del suceso A.*

Si hemos obtenido cincuenta y dos veces el suceso A en cien pruebas, la frecuencia relativa es:

$$f_r(A) = \frac{52}{100}$$

Si se ha presentado el suceso A cincuenta y dos veces en doscientas pruebas se tiene:

$$f_r(A) = \frac{52}{200}$$

5.2. Supongamos que realizamos n pruebas de un experimento aleatorio. Si el suceso A se realiza n_A veces, entonces,

n_A se llama frecuencia absoluta de A y se designa por $f_a(A)$, n_A/n se llama frecuencia relativa de A y se designa por $f_r(A)$.

Es decir,

$$f_a(A) = n_A$$

$$f_r(A) = \frac{n_A}{n}$$

13. Se ha lanzado una moneda diez veces y el suceso «cara» se ha realizado cuatro veces.

a) ¿Cuál es la frecuencia absoluta del suceso A: «salir cara»?
b) ¿Cuál es su frecuencia relativa?
c) ¿Cuál es la frecuencia absoluta del suceso B: «salir cruz»?
d) ¿Cuál es su frecuencia relativa?

14. Se ha realizado el siguiente experimento aleatorio y los datos obtenidos se ordenan en el siguiente cuadro.

Cara del dado	Número de veces
1	12
2	8
3	10
4	9
5	4
6	7

Halla las frecuencias absolutas y relativas de

a) Los sucesos elementales.
b) El suceso «salir par».
c) El suceso «salir impar».
d) El suceso «salir múltiplo de 3».

6 Propiedades de las frecuencias

6.1. Dado un suceso A de $\mathscr{P}(E)$ la frecuencia absoluta n_A en n pruebas es evidentemente un número menor o igual que el número de pruebas realizadas, es decir: $0 \leqslant n_A \leqslant n$

Dividiendo por n se tiene: $0 \leqslant \frac{n_A}{n} \leqslant 1$

y siendo $f_r(A) = \frac{n_A}{n}$ resulta: $0 \leqslant f_r(A) \leqslant 1$

La frecuencia relativa de un suceso es un número comprendido entre 0 y 1.

La frecuencia relativa del suceso seguro es: $f_r(E) = \frac{n}{n} = 1$

La frecuencia relativa del suceso imposible es: $f_r(\varnothing) = \frac{0}{n} = 0$

$$0 \leqslant n'_A \leqslant n$$
$$\Downarrow$$
$$0 \leqslant \frac{n_A}{n} \leqslant 1$$
$$\Downarrow$$
$$0 \leqslant f_r(A) \leqslant 1$$

6.2. Consideremos dos sucesos A y B, relativos al mismo experimento aleatorio, que sean incompatibles, es decir, tales que

$$A \cap B = \varnothing$$

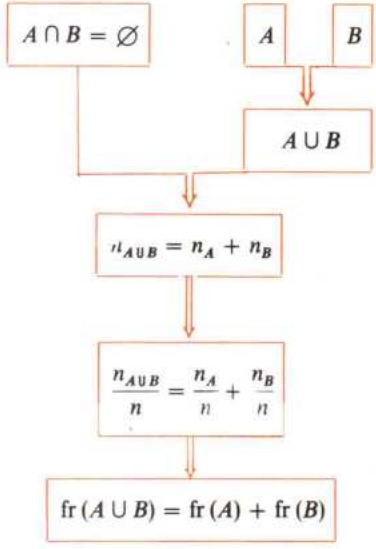
Si llamamos n_A a la frecuencia absoluta del suceso A; n_B a la frecuencia absoluta del suceso B, y $n_{A \cup B}$ a la frecuencia absoluta del suceso $A \cup B$, se tendrá

$$n_{A \cup B} = n_A + n_B$$

dividiendo por el número de pruebas n: $\dfrac{n_{A \cup B}}{n} = \dfrac{n_A}{n} + \dfrac{n_B}{n}$

luego $$f_r(A \cup B) = f_r(A) + f_r(B)$$

es decir, *la frecuencia relativa de la unión de dos sucesos incompatibles es igual a la suma de las frecuencias de estos sucesos.*



Ejemplo:

- Se ha lanzado un dado treinta veces. El suceso A de *obtener número par* se ha presentado dieciocho veces y el suceso B de *obtener* 3 ó 5 se ha realizado seis veces. Como A y B son sucesos incompatibles se verifica:

$$f_r(A \cup B) = \frac{18}{30} + \frac{6}{30} = \frac{24}{30}$$

7 Probabilidad: definición

7.1. Consideremos el experimento consistente en lanzar una moneda al aire.

En la tabla hemos representado algunos resultados del suceso A «sacar cara». Se observa que cuando el número de pruebas se hace cada vez mayor, la frecuencia relativa del suceso A se aproxima hacia 1/2.

En este caso diremos que la frecuencia relativa tiende a estabilizarse al aumentar el número de pruebas.

Al número fijo, en nuestro caso 0,5, hacia el cual tiende la *frecuencia relativa del suceso A, se* llama *probabilidad del suceso A*, la probabilidad será, por tanto, una aplicación del álgebra de sucesos en los números reales que ha de verificar tres propiedades análogas a las que cumplen las frecuencias relativas.

15. Con los datos del ejercicio **13**, se pide la frecuencia relativa del suceso $A \cup B$.

n	Frecuencia absoluta $f_a(A)$	Frecuencia relativa $f_r(A)$
1	1	1
2	1	0,5
⋮		
10	4	0,4
⋮		
100	48	0,48
⋮		
1.000	487	0,487
⋮		
10.000	5.003	0,5003

7.2. *Definición.*

Sea $\mathscr{P}(E)$ un espacio de sucesos, $\mathbb{R}$ el cuerpo de los números reales.

Se llama *probabilidad* a una aplicación $p : \mathscr{P}(E) \longrightarrow \mathbb{R}$ que verifica los axiomas siguientes:

Axioma 1: Para todo suceso $A \in \mathscr{P}(E)$; $0 \leqslant p(A) \leqslant 1$

Axioma 2: $p(E) = 1$.

Axioma 3: Para todo par de sucesos A y B incompatibles

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

Es importante señalar que estos axiomas han surgido al observar el comportamiento de las frecuencias relativas. Lo que se hace en los axiomas es idealizar el mencionado comportamiento de las frecuencias.

Se llama *espacio probabilístico* a la terna $(E, \mathscr{P}(E), p)$ donde:

E es el espacio muestral.

$\mathscr{P}(E)$ es el álgebra de Boole de los sucesos de E,

p es la probabilidad.

Sea $E = \{x, c\}$ el espacio muestral que resulta al tirar una moneda; $\mathscr{P}(E) = \{\varnothing, \{x\}, \{c\}, E\}$ el álgebra de los sucesos de E.

Definimos la aplicación de $\mathscr{P}(E)$ en $\mathbb{R}$ así: $\mathscr{P}(E) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$p(\varnothing) = 0; \quad p(\{x\}) = p(\{c\}) = 1/2; \quad p(E) = 1$$

entonces la aplicación p es una probabilidad definida en $\mathscr{P}(E)$.

Sea $E = \{1, x, 2\}$ el espacio muestral que resulta de tirar un dado de quinielas

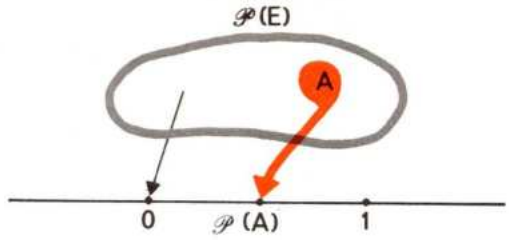
$$\mathscr{P}(E) = \{\varnothing, \{1\}, \{x\}, \{2\}, \{1, x\}, \{1, 2\}, \{x, 2\}, E\}$$

es el álgebra de los sucesos de E.

Definimos la aplicación p de $\mathscr{P}(E)$ en $\mathbb{R}$ así:

$$p(\varnothing) = 0$$
$$p(\{1\}) = p(\{x\}) = p(\{2\}) = 1/3$$
$$p(\{1, x\}) = p(\{1, 2\}) = p(\{x, 2\}) = 2/3$$
$$p(E) = 1$$

Entonces p es una probabilidad ya que verifica los tres axiomas de la definición.



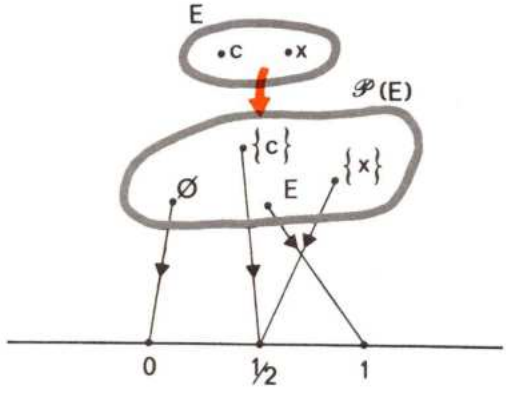
1.° Para todo suceso $A \in \mathscr{P}(E)$

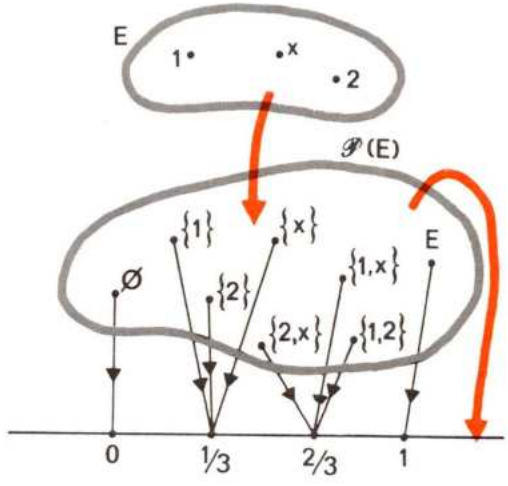
$$0 \leqslant p(A) \leqslant 1$$

2.° $p(E) = 1$.

3.° Para todo par de sucesos incompatibles

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$





8 Probabilidad: propiedades

8.1. Si A, B y C son tres sucesos incompatibles dos a dos, se verifica: $p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C)$

En efecto,

$$p(A \cup B \cup C) \overset{①}{=} p(A \cup (B \cup C)) = \overset{②}{=} p(A) + p(B \cup C) = \overset{③}{=} p(A) + p(B) + p(C)$$

donde en ① se ha aplicado la asociatividad de la unión de sucesos, y en ② y ③ el axioma 3 de la probabilidad.

Esta propiedad se puede generalizar a n sucesos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ siempre que sean incompatibles dos a dos,

$$p(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = p(A_1) + p(A_2) + \cdots + p(A_n)$$

8.2. *Regla de Laplace.*

Consideremos el experimento aleatorio consistente en tirar un dado. Si el dado no está cargado podemos admitir que la probabilidad de obtener un número es la misma para todos.

Como los sucesos elementales son incompatibles dos a dos, se tiene:

$$p(E) = p(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}) = p(\{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \cup \{4\} \cup \{5\} \cup \{6\}) = p(\{1\}) + p(\{2\}) + p(\{3\}) + p(\{4\}) + p(\{5\}) + p(\{6\})$$

Si admitimos que los sucesos $\{1\}, \{2\}, \ldots, \{6\}$ tienen todos la misma probabilidad

$$p(\{1\}) = p(\{2\}) = p(\{3\}) = p(\{4\}) = p(\{5\}) = p(\{6\}) = 1/6$$

resulta, teniendo en cuenta la propiedad estudiada en **8.1.**, que la probabilidad del suceso $A = \{2, 4, 6\} = \{2\} \cup \{4\} \cup \{6\}$

es: $p(A) = p(\{2\}) + p(\{4\}) + p(\{6\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

En general, si el suceso E está compuesto por los puntos muestrales $a_1, a_2, \ldots, a_n$

que dan lugar a los sucesos elementales $A_1, A_2, \ldots, A_n$

si $p(A_1) = p(A_2) = \cdots = p(A_n) = p$

se verifica:

$$1 = p(E) = p(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n) = p(A_1) + p(A_2) + \cdots + p(A_n) = p + p + \cdots + p = p \cdot n$$

luego $p = 1/n$

16. Halla la probabilidad de sacar un as en una extracción de una carta de la baraja.

17. Se tiran tres monedas al aire, se pide:

a) El espacio muestral.

b) La probabilidad de sacar dos caras.

18. Se lanzan dos dados. Se pide la probabilidad de que la suma de sus puntos sea 7.

Si el suceso A es tal que: $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k$,

se tiene $p(A) = p(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) =$

$$= p(A_1) + p(A_2) + \cdots + p(A_k) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n} = \frac{k}{n}$$

Así hemos llegado a la *Regla de Laplace*

$$p(A) = \frac{k}{n} = \frac{\text{número de sucesos elementales de } A}{\text{número de sucesos elementales de } E}$$

Si el espacio muestral E consta de n sucesos equiprobables entre sí, y de ellos k son favorables a la realización del suceso A, entonces

$$p(A) = \frac{k}{n} = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}$$

8.3. *Probabilidad del suceso contrario.*

Si $\bar{A}$ es el suceso contrario de A se verifica:

$$p(\bar{A}) = 1 - p(A)$$

En la demostración esquemática del margen se ha tenido en cuenta en ① que los sucesos A y $\bar{A}$ son incompatibles, y se ha aplicado el axioma 3.

En ②, se ha utilizado el axioma 2; en ③ se ha sumado $-p(A)$ a los dos miembros de $1 = p(A) + p(\bar{A})$.

Ejemplos:

- La probabilidad de sacar «al menos una cara» en el lanzamiento de dos monedas es 3/4. En efecto:

  Designemos por A el suceso que consiste en obtener las dos cruces; $\bar{A}$ será el suceso de *no obtener dos cruces*, es decir, *obtener al menos una cara.*
  Como hay un solo caso favorable al suceso A

  $$p(A) = 1/4 \quad \text{luego} \quad p(\bar{A}) = 1 - p(A) = 1 - 1/4 = 3/4$$

- La probabilidad de sacar «par» al tirar un dado es 1/2.
  La probabilidad del suceso contrario es $1 - 1/2 = 1/2$.
  Este suceso es sacar «impar».

8.4. *Probabilidad del suceso imposible* $\varnothing$.

La probabilidad del suceso imposible es cero.

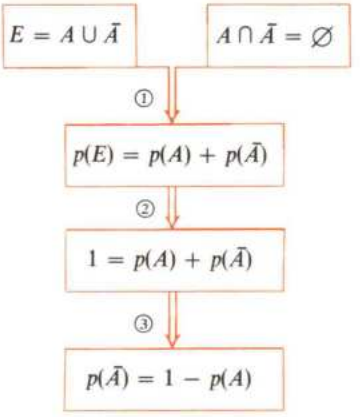
$$p(\varnothing) = 0$$

Esto es consecuencia de la propiedad anterior ya que

$$p(\varnothing) = p(\bar{E}) = 1 - p(E) = 1 - 1 = 0$$

19. Una urna tiene cinco bolas blancas y tres negras. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea blanca?

20. Halla la probabilidad de que en dos cartas extraídas de una baraja, haya dos ases.



21. La probabilidad de sacar dos caras al tirar dos monedas al aire es 1/4.
¿Cuál es la probabilidad de obtener al menos una cara?

22. Se tiran dos monedas al aire. ¿Cuál es la probabilidad de que salga al menos una cruz?

23. Se lanza un dado y una moneda. Se pide:

a) El espacio muestral, haciendo un diagrama en árbol.

b) La probabilidad de sacar al menos un 5 con el dado.

8.5. *Probabilidad del suceso unión de dos sucesos compatibles.*

Si A y B son dos sucesos de $\mathscr{P}(E)$ se verifica:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

En efecto podemos hacer una partición del conjunto $A \cup B$ en tres conjuntos disjuntos dos a dos, según se indica en el diagrama $(A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)$

análogamente

$$A = (A - B) \cup (A \cap B)$$
$$B = (B - A) \cup (A \cap B)$$

Aplicando el axioma 3 a las igualdades anteriores resulta:

$$p(A \cup B) = p(A - B) + p(A \cap B) + p(B - A) \quad [1]$$
$$p(A) = p(A - B) + p(A \cap B) \quad [2]$$
$$p(B) = p(B - A) + p(A \cap B) \quad [3]$$

despejando $p(A - B)$ de [2] y $p(B - A)$ de [3] resultan [2'] y [3'] (ver margen), y sustituyendo en [1] se tiene:

$$p(A \cup B) = p(A) - p(A \cap B) + p(A \cap B) + p(B)$$
$$- p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

8.6. Si $A \subset B \Rightarrow p(A) \leqslant p(B)$; en la demostración que aparece en el esquema del margen se ha tenido en cuenta que:

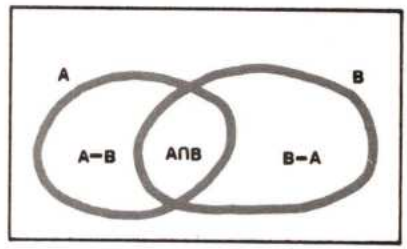
a) $B - A$ es el complementario de A respecto de B, en ①.

b) El axioma 3 de la probabilidad en ②.

c) $p(B - A) \geqslant 0$.(Axioma 1), en ③.

Consideremos el experimento consistente en lanzar un dado, y los sucesos A y B siguientes: $A = \{2, 4\}$; $B = \{2, 4, 6\}$

Como $A \subset B$ se deduce que $p(A) \leqslant p(B)$



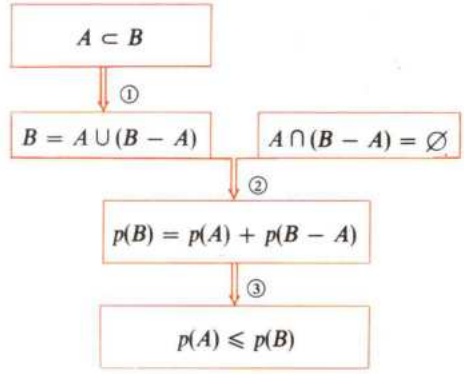
$$A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)$$
$$A = (A - B) \cup (A \cap B)$$
$$B = (B - A) \cup (A \cap B)$$

Los conjuntos $A - B$, $A\ B$ y $B - A$ son disjuntos dos a dos es decir:

$$(A - B) \cap (A \cap B) = \varnothing$$
$$(B - A) \cap (A \cap B) = \varnothing$$
$$(A - B) \cap (B - A) = \varnothing$$

$$[2'] p(A - B) = p(A) - p(A \cap B)$$
$$[3'] p(B - A) = p(B) - p(A \cap B)$$

DEMOSTRACION



9 Probabilidad del suceso intersección

9.1. Sea A el suceso «sacar par» y B el suceso «sacar múltiplo de 3» al tirar un dado.

$$A = \{2, 4, 6\} \text{ y } B = \{3, 6\}$$

Se tiene: $p(A) = p(\{2, 4, 6\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$$p(B) = p(\{3, 6\}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

luego: $p(A \cap B) = p(\{6\}) = \frac{1}{6}$.

Observa que: $\frac{1}{6} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$, es decir, $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$.

Se tiran ahora dos dados uno rojo y otro negro. Sea A el suceso «sacar múltiplo de 2» con el dado rojo y B el suceso «sacar múltiplo de 3» con el dado negro. Los resultados posibles son 6 (véase el diagrama del margen); su probabilidad es:

$$p(A \cap B) = \frac{6}{36} = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} = p(A) \cdot p(B)$$

9.2. En general dados dos sucesos A y B, se cumple:

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$$

cuando A y B son *sucesos independientes.*

En este apartado daremos una idea intuitiva de *sucesos independientes.*

Dos sucesos A y B son independientes cuando la realización de A no influye en la de B, y recíprocamente.

¿Cuál es la probabilidad de sacar cara en dos tiradas consecutivas de una moneda? Se tiene:

A: suceso de «sacar cara en la 1.ª tirada».
B: suceso de «sacar cara en la 2.ª tirada».

Es evidente que el resultado de A no influye en B. En este caso

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

¿Cuál es la probabilidad de sacar dos ases al extraer dos cartas consecutivas de una baraja española? Se tiene:

A: Suceso de «sacar as» en la primera extracción.
B: Suceso de «sacar as» en la segunda extracción.

Los sucesos A y B no son independientes.

$$p(A) = \frac{4}{40}$$

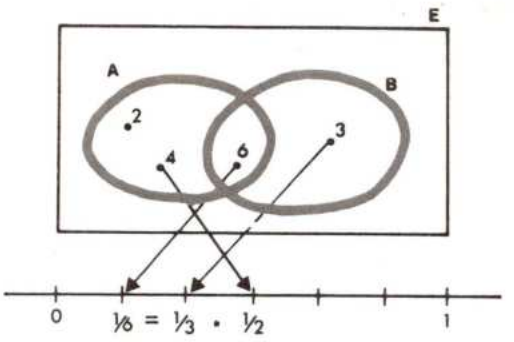
Si se realiza A quedan tres ases, y entonces la probabilidad de B es 3/39.

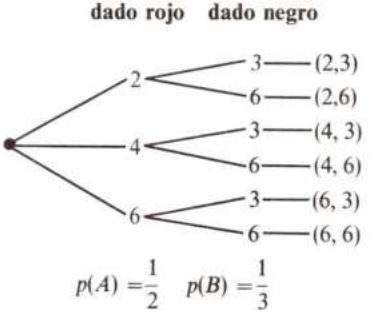
En este caso en vez de $p(B)$ se suele escribir $p(B/A)$, para indicar que el suceso B viene condicionado por el suceso A.

$$p(B/A) = \frac{3}{39}$$

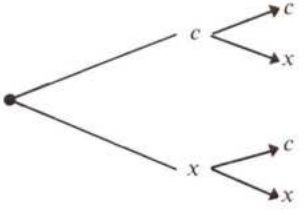
Aquí se verifica

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} = \frac{1}{130}$$





$p(A) = \frac{1}{2}$ $p(B) = \frac{1}{3}$



24. Aplicando la regla de Laplace, halla la probabilidad de obtener dos caras en dos tiradas de una moneda.

25. Halla la probabilidad de sacar dos reyes de una baraja en dos extracciones consecutivas.

Ejercicios y cuestiones

26. Manolo y Eduardo intervienen en un torneo de tenis. El primero que gane dos partidos seguidos o tres alternos gana el torneo. Se pide:

a) El diagrama en árbol de los posibles resultados.
b) El número de elementos del espacio muestral.
c) El número mínimo de partidos o el número máximo para concluir la competición.

27. Martín y Paco juegan a cara y cruz. En cada tirada de una moneda se gana o se pierde una peseta. Martín comienza el juego con una peseta y dejará de jugar si antes de la quinta tirada pierde todo su dinero o si gana tres pesetas. Se pide:

a) El diagrama en árbol de los posibles resultados.
b) El número de elementos del espacio muestral.
c) El número mínimo y máximo de tiradas para ganar.

28. Se lanzan tres monedas y se considera el número de caras que resultan; se pide:

a) El espacio muestral.
b) La probabilidad de cada uno de los puntos del espacio muestral.

Se supone que el suceso de salir cara o cruz es equiprobable.

29. Se eligen al azar dos libros de un conjunto de ocho de los cuales tres son defectuosos. ¿Cuál es la probabilidad de que aparezca al menos uno defectuoso?

30. De una baraja de 40 cartas se sacan dos cartas. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos sean reyes?

31. En un baile de disfraces se reúnen diez matrimonios. Se eligen dos personas al azar. Halla la probabilidad de que:

a) Las dos personas sean esposos.
b) Una sea hombre y otra mujer.

32. Un alumno sabe veinte lecciones de las veinticuatro de que consta el libro de Matemática. En un examen, por medio de bolas, se eligen dos lecciones al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que sepa las dos?

33. Sea el espacio muestral $E = \{1, x, 2\}$; se define la función p de E en el siguiente modo:

a) $p(\{1\}) = p(\{x\}) = p(\{2\}) = \frac{1}{3}$

b) $p(\{1\}) = p(\{x\}) = \frac{1}{2}, \quad p(\{2\}) = -1$

c) $p(\{1\}) = \frac{1}{2}, \quad p(\{x\}) = \frac{1}{4}, \quad p(\{2\}) = \frac{1}{4}$

d) $p(\{1\{) = \frac{1}{2}, \quad p(\{x\}) = \frac{1}{2}, \quad p(\{x\}) = \frac{1}{2}$

¿En cuál de estos casos p es una función de probabilidad?

34. Una moneda está cargada de modo que la probabilidad de que aparezca cara es doble de que aparezca cruz. Halla la probabilidad de los sucesos:

a) Salir cara.
b) Salir cruz.

35. Un submarino lanza contra un barco tres torpedos. ¿Cuál es la probabilidad de hacer blanco si la probabilidad de hacerlo con cada uno es 1/2?

Tema 21

VARIABLE ALEATORIA
PARAMETROS ESTADISTICOS

Muchas veces, dado un experimento aleatorio, estamos interesados más que en el estudio de los resultados del experimento en unos ciertos valores que podemos asociar a esos resultados. Esta asociación se establece mediante una aplicación muy importante que se estudia al principio de este tema: la variable aleatoria. Con frecuencia se designa también con este nombre el conjunto imagen de la mencionada aplicación. Se estudian después los parámetros estadísticos más importantes asociados a una variable y su distribución de frecuencias; las medidas de centralización y las medidas de dispersión.

1 Variable aleatoria

1.1. Consideremos el experimento aleatorio consistente en tirar dos veces un dado y anotar los números que aparecen en la cara superior.

El espacio muestral consta de 36 puntos:

$E = \{(1,1), (1,2), \ldots, (1,6), (2,1), (2,2), \ldots, (6,6)\}$ (Ver margen)

Si estamos interesados, no en un resultado particular, sino en la suma de los puntos que salen hemos establecido una aplicación del espacio muestral E en el conjunto $\mathbb{R}$.

Hemos definido, por tanto, una aplicación de E en el cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$E \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(i, j) \longrightarrow \xi(i, j) = i + j$$

El conjunto imagen de esta aplicación es:

$$X = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

Al margen se ha indicado la imagen de cada elemento de E.

Esta función, ξ, recibe el nombre de *variable aleatoria.*

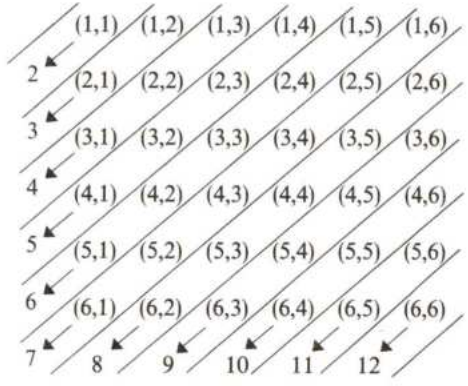
Así, $\xi(\{2\}) = 1{,}1$, ya que sólo se puede obtener el 2 de una sola manera: $2 = 1 + 1$

$$\xi^{-1}(5) = \{(4,1), (3,2), (2,3), (1,4)\}$$

como se indica a la derecha.

En el experimento de lanzar una moneda, el espacio muestral es $E = \{c, x\}$; la aplicación de E en $\mathbb{R}$, dada por $\xi(c) = 0$ y $\xi(x) = 1$; es una variable aleatoria. El conjunto X es en este caso $X = \{0, 1\}$

$$E = \begin{Bmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (2,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{Bmatrix}$$



$$\xi(E) = X = \{2, 3, 4, 5, 6, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

En el experimento aleatorio consistente en lanzar tres monedas al aire, el espacio muestral E es el que aparece al margen.

La función ξ de E en $\mathbb{R}$ la vamos a definir así:

$$\xi(a_i) = \text{«número de caras»} \text{ para todo } a_i \in E.$$

El conjunto X es $\{0, 1, 2, 3\}$.

1.2. *Sean E un espacio muestral y $\mathbb{R}$ el cuerpo de los números reales. Se llama variable aleatoria una aplicación ξ de E en $\mathbb{R}$.*

Muchas veces el conjunto imagen $\xi(E)$ se llama también *variable aleatoria.*

$\xi(E)$ se designa por X.

Ejemplos:

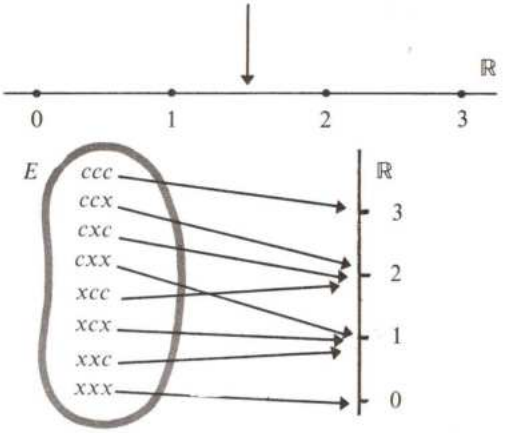
- Sea el experimento aleatorio consistente en preguntar a cada alumno la longitud de la pizarra de clase.
  Cada respuesta es un número que podemos tomar como elemento de la variable aleatoria X.

- Un juego de dados tiene las siguientes reglas:

  a) Si sale un número primo se gana dicho número de pesetas.
  b) Si sale un número no primo se pierde dicho número de pesetas.

  El conjunto X que se obtiene haciendo corresponder a cada elemento de $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ el número de pesetas que se gana o se pierde cuando aparece es $X = \{1, 2, 3, 5, -4, -6\}$

$E = \{ccc, ccx, cxc, cxx, xcc, xcx, xxc, xxx\}$



1. Consideremos de nuevo el experimento que consiste en tirar dos veces un dado.
Se establece la aplicación ξ de E en $\mathbb{R}$, así:

«A cada punto de E le asociamos en $\mathbb{R}$ el número que corresponde al primer dado».

Se pide:

a) El conjunto X.
b) El conjunto original de elemento 2, es decir, $\xi^{-1}(2)$.

Observa que

$\xi^{-1}(3) = \{(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6)\}$

2 Distribución de frecuencias de una variable aleatoria

2.1. Consideremos el fenómeno aleatorio consistente en la venta de clavos de 20, 21, 22 y 23 mm en una ferretería.

La variable aleatoria es

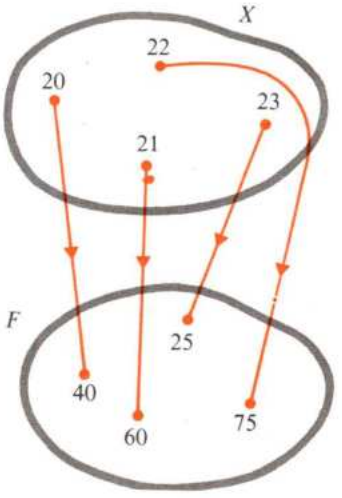
$$X = \{20, 21, 22, 23\}$$

A cada una en las longitudes anteriores ha correspondido una venta de 40, 60, 75 y 25 piezas, respectivamente.

La aplicación dada por

X	20	21	22	23
F	40	60	75	25

de X en $F = \{40, 60, 75, 25\}$ es la *función de distribución.*
Al conjunto F se le llama también *distribución de frecuencias.*



La distribución de frecuencias aparece en la tabla del margen. En ella se designa por:

x_i a la variable aleatoria
f_i a las frecuencias absolutas
h_i a las frecuencias relativas
F_i la frecuencia absoluta acumulativa
H_i la frecuencia relativa acumulativa.

Las frecuencias acumulativas es, como se observa en la tabla, la suma de todas las frecuencias anteriores a una dada.

$$x_1 = 20 \quad x_2 = 21 \quad x_3 = 22 \quad x_4 = 23$$
$$f_1 = 40 \quad f_2 = 60 \quad f_3 = \quad f_4 = 25$$

$$F_1 = f_1 = 40$$

$$F_2 = f_1 + f_2 = 40 + 60 = 100$$

$$F_3 = f_1 + f_2 + f_3 = 40 + 60 + 75 = 175$$

$$F_4 = f_1 + f_2 + f_3 + f_4$$

$$F_4 = 40 + 60 + 75 + 25 = 200$$

$$h_1 = \frac{40}{200} \quad h_2 = \frac{60}{200} \quad h_3 = \frac{75}{200} \quad h_4 = \frac{25}{200}$$

$$H_1 = h_1 = \frac{40}{200}$$

$$H_2 = h_1 + h_2 = \frac{40}{200} + \frac{60}{200} = \frac{100}{200}$$

$$H_3 = h_1 + h_2 + h_3$$

$$H_3 = \frac{40}{200} + \frac{60}{200} + \frac{75}{200} = \frac{175}{200}$$

$$H_4 = h_1 + h_2 + h_3 + h_4$$

$$H_4 = \frac{40}{200} + \frac{60}{200} + \frac{75}{200} + \frac{25}{200} = \frac{200}{200} = 1$$

Variable	Frec. absolutas		Frec. relativa	
	Ordin.	Acumul.	Ordin.	Acumul.
x_i	f_i	F_i	h_i	H_i
20	40	40	$\frac{40}{200}$	$\frac{40}{200}$
21	60	100	$\frac{60}{200}$	$\frac{100}{200}$
22	75	175	$\frac{75}{200}$	$\frac{175}{200}$
23	25	200	$\frac{25}{200}$	$\frac{200}{200}$

Ejemplo:

- Consideremos ahora el fenómeno aleatorio de lanzar un dado. La variable aleatoria X es:

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Se han realizado treinta lanzamientos con los resultados siguientes en la distribución de frecuencias

$$F = \{4, 6, 6, 4, 5, 5\}$$

Al margen aparece la tabla de distribución de la variable X.

	Frec. absolutas		Frec. relativas	
	Ordin.	Acumul.	Ordin.	Acumul.
x_i	f_i	F_i	h_i	H_i
1	4	4	$\frac{4}{30}$	$\frac{4}{30}$
2	6	10	$\frac{6}{30}$	$\frac{10}{30}$
3	6	16	$\frac{6}{30}$	$\frac{16}{30}$
4	4	20	$\frac{4}{30}$	$\frac{20}{30}$
5	5	25	$\frac{5}{30}$	$\frac{25}{30}$
6	5	30	$\frac{5}{30}$	$\frac{30}{30}$
	30		1	

2.2. En el estudio de una variable aleatoria X y de sus frecuencias la primera operación que hay que realizar es la confección de una tabla.

Una tabla en la que se muestran los valores de la variable y sus frecuencias suelen tomar la forma siguiente:

Variable x_i	**Frecuencias absolutas**		**Frecuencias relativas**	
	Ordinarias f_i	Acumulativas F_i	Ordinarias h_i	Acumulativas H_i
x_1	f_1	$F_1 = f_1$	$h_1 = \frac{f_1}{N}$	$H_1 = h_1$
x_2	f_2	$F_2 = f_1 + f_2$	$h_2 = \frac{f_2}{N}$	$H_2 = h_1 + h_2$
x_3	f_3	$F_3 = f_1 + f_2 + f_3$	$h_3 = \frac{f_3}{N}$	$H_3 = h_1 + h_2 + h_3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	f_n	$F_n = f_1 + f_2 + \cdots f_n$	$h_n = \frac{f_n}{N}$	$H_n = h_1 + h_2 + \cdots + h_n$
	$\sum_{i=1}^{n} f_i = N$	$F_n = N$	$\sum_{i=1}^{n} h_i = 1$	$H_n = 1$

Se observa en la tabla que:

1.º El número total N de datos no coincide con el número n de valores de la variable.

Así, en el ejemplo primero de **2.1.** hay sólo $n = 4$ valores de la variable, mientras que el número total de datos u observaciones es $N = 200$.

2.º $N = F_n = f_1 + f_2 + \cdots + f_n$. Así en el ejemplo anteriormente mencionado $200 = 40 + 60 + 75 + 25$.

3.º La suma de las frecuencias relativas es igual a la unidad.

4.º $H_n = 1$, ya que:

$$H_n = h_1 + h_2 + \cdots + h_n = \frac{f_1}{N} + \frac{f_2}{N} + \cdots + \frac{f_n}{N} = \frac{f_1 + f_2 + \cdots + f_n}{N} = \frac{N}{N} = 1$$

2. Dada la variable aleatoria

$$X = \{20, 30, 40, 50, 60\}$$

y sus frecuencias absolutas.

$$F = \{15, 27, 13, 20, 25\}$$

Haz la tabla de distribuciones de frecuencias.

3. Se han lanzado 100 veces tres monedas. La variable aleatoria

$$X = \{0, 1, 2, 3\}$$

tiene por distribución de frecuencias

$$F = \{12, 35, 37, 16\}$$

Haz la tabla de distribución de frecuencias.

Los datos relativos a una distribución de frecuencias de una variable aleatoria se suelen dar también así:

X	x_1	x_2	x_3	...	x_n
F	f_1	f_2	f_3	...	f_n

donde la aplicación de $X \longrightarrow F$ es la función de distribución de frecuencias.

2.3. En la tabla hemos escrito

$$\sum_{i=1}^{n} f_i = N$$

El símbolo Σ es la letra griega mayúscula sigma y se emplea en matemática con el valor de *suma* o *sumatorio*.

El símbolo $\sum_{i=1}^{n} f_i$ se utiliza para indicar la suma de todas las frecuencias desde $i = 1$ hasta $i = n$.

Por definición se tiene:

$$\sum_{i=1}^{n} f_i = f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_n$$

Del mismo modo

$$\sum_{i=1}^{n} h_i = h_1 + h_2 + h_3 + \cdots + h_n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + \cdots + x_n y_n$$

$$\sum_{i=1}^{n} a x_i = a x_1 + a x_2 + a x_3 + \cdots + a x_n = a(x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n) = a \sum_{i=1}^{n} x_i$$

En la práctica, cuando se saben los valores que toma i, se escribe:

$$\sum h_i \quad \text{en vez de} \quad \sum_{i=1}^{n} h_i$$

2.4. Si el número n de valores de la variable aleatoria X es grande, se suelen agrupar en intervalos dando lugar a una nueva variable.

Consideremos que estamos interesados en el estudio de las tallas de un centro de 300 alumnos.

Para facilitar los cálculos, podemos agrupar en intervalos los resultados. En la práctica los intervalos suelen ser iguales y la diferencia entre los extremos se llama *tamaño de la clase*.

4. Escribe las expresiones desarrolladas de

a) $\sum_{i=1}^{5} x_i$

b) $\sum_{i=1}^{4} (h_i - 3)$

c) $\sum_{i=1}^{6} f_i x_i$

5. Dada las variables x_i, y_i, desarrolla:

a) $\sum_{i=1}^{7} x_i$; b) $\sum_{i=1}^{5} y_i$; c) $\sum_{i=1}^{8} x_i y_i$; d) $\sum_{i=1}^{4} x_i y_i^2$

Si el valor mínimo es 153 y el mayor 169 y los intervalos son de 2 cm se obtienen los siguientes datos dados al margen.

Intervalos de clase	Marcas de clase
[153,155[	154
[155,157[	156
[157,159[	158
[159,161[	160
[161,163[	162
[163,165[	164
[165,167[	166
[167,169]	168

Los intervalos [•, •[, cerrados por la izquierda y abiertos por la derecha, se llaman *intervalos de clase*, y los números extremos de intervalos *límite inferior y límite superior.*

El punto medio de cada intervalo de clase recibe el nombre de *marca de clase.*

La marca de clase de [153, 155[es $154 = \dfrac{153 + 155}{2} = 154$

La marca de clase de un intervalo representa la estatura de todos los alumnos que pertenecen a ese intervalo.

La marca de clase del primer intervalo es 154 cm.

154 cm representa la talla de los alumnos que miden más de 153 cm y menos de 155 cm. Por esta razón, cuando se agrupan los datos por intervalos, hay una pérdida de exactitud en la información que éstos proporcionan.

2.5. La variable aleatoria X puede tomar cualquier valor real desde 153 a 169. La nueva variable X' formada por las marcas de clase es $X' = \{154, 156, 158, 160, \ldots, 168\} = \{x'_i\}$

La frecuencia de una marca de clase es la frecuencia de los casos pertenecientes a ese intervalo.

La tabla de distribución de la variable x'_i es la siguiente:

6. Dado el segmento [55,83[se pide hallar:

a) tamaño de la clase que representa,

b) límite inferior,

c) límite superior,

d) marca de la clase.

Intervalos de clase	**Marcas de clase** (Variable)	**Frecuencias absolutas**		**Frecuencias relativas**	
		Ordinarias	Acumulativas	Ordinarias	Acumulativas
	x'_i	f_i	F_i	h_i	H_i
[153, 155[	154	15	15	15/300	15/300
[155, 157[	156	40	55	40/300	55/300
[157, 159[	158	35	90	35/300	90/300
[159, 161[	160	25	115	25/300	115/300
[161, 163[	162	35	150	35/300	150/300
[163, 165[	164	70	220	70/300	220/300
[165, 167[	166	55	275	55/300	275/300
[167, 169]	168	25	300	25/300	300/300
		$N = 300$	$N = F_n$	$h_1+h_2+\cdots+h_n=1$	

2.6. En adelante, en una distribución de datos agrupados en intervalos, la variable X' se designará por X y los elementos x_i' por x_i.

En el estudio de una distribución de frecuencias de una variable aleatoria consideraremos siempre los tres casos.

Variable aleatoria de datos simples, es decir, aquella cuya frecuencia es 1 para cada valor x_i.

Variable aleatoria de datos con frecuencia, es decir, aquella cuya frecuencia es mayor que 1 para algunos valores de x_i.

Variable aleatoria con datos agrupados, los elementos de la nueva variable son las marcas de clase.

7. La duración de 1.000 bombillas, expresada en horas, ha sido la que se indica.

Duración (horas)	Frecuencia
[400,450[	30
[450,500[	100
[500,550[	175
[550,600[	225
[600,650[	180
[650,700[	125
[700,750[	100
[750 800]	65

Se pide h_i, F_i y H_i.

3 Gráfica de una distribución de frecuencias

3.1. La comprensión de la distribución de frecuencias de una variable aleatoria se facilita mucho cuando se hace una representación gráfica.

Dada la función de distribución de frecuencias absolutas.

X	x_1	x_2	x_3	...	x_n
F	f_1	f_2	f_3	...	f_n

podemos deducir como consecuencia las funciones:

a) De X en el conjunto de frecuencias absolutas acumulativas:

X	x_1	x_2	x_3	...	x_n
F_i	F_1	F_2	F_3	...	F_n

b) De X en el conjunto de las frecuencias relativas:

X	x_1	x_2	x_3	...	x_n
h_i	h_1	h_2	h_3	...	h_n

c) De X en el conjunto de las frecuencias relativas acumulativas

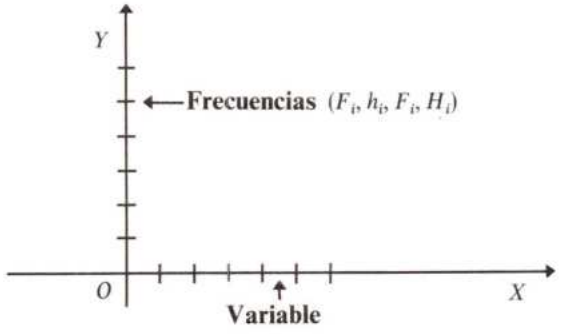
X	x_1	x_2	x_3	...	x_n
H_i	H_1	H_2	H_3	...	H_n

La representación de una distribución de frecuencias se reduce a la representación de una función.

Dentro de las figuras que representan a una función las más intuitivas e interesantes desde el punto de vista matemático son los diagramas cartesianos. A partir de éstos se construyen los diagramas indicados al margen.

3.2. *Diagrama cartesiano o de puntos.*

Para construir un diagrama cartesiano:
1.º Se dibuja un sistema de ejes coordenados, tomando en el eje OX los valores de la variable X, y en el eje OY los valores de una cualquiera de las frecuencias f_i, h_i, F_i, H_i.



2.º Se señalan los puntos (x_i, f_i), (x_i, h_i), (x_i, F_i) o (x_i, H_i) según la función que se represente.

El conjunto de puntos así obtenidos se llama diagrama cartesiano, o también diagrama de puntos.

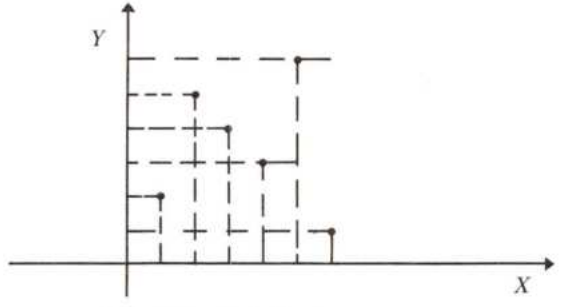


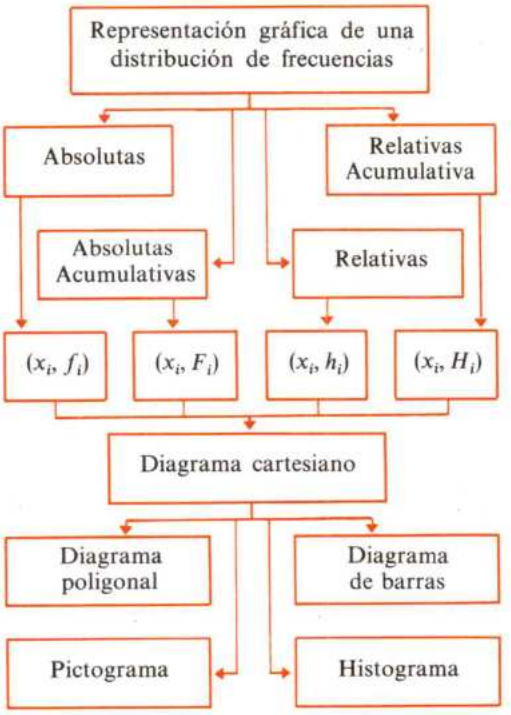
Diagrama cartesiano

3.3. *Diagrama cartesiano.*

Una vez dibujado el diagrama cartesiano si se unen los puntos con segmentos se obtiene el diagrama poligonal.

En la figura se ha representado el diagrama poligonal correspondiente a la función (x_i, H_i) de **2.1.**

La figura obtenida en este caso se llama *diagrama poligonal acumulativo.*



8. Representa por un diagrama poligonal las funciones (x_i, f_i), (x_i, h_i) y (x_i, F_i) del ejemplo 2.1.

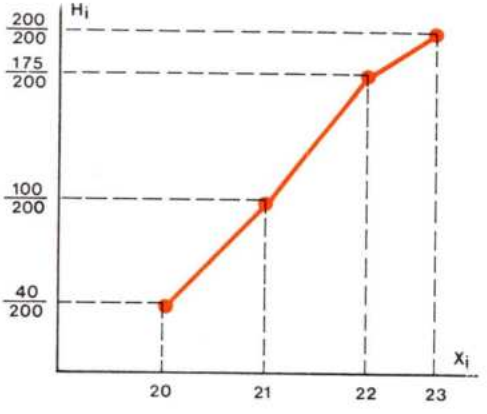
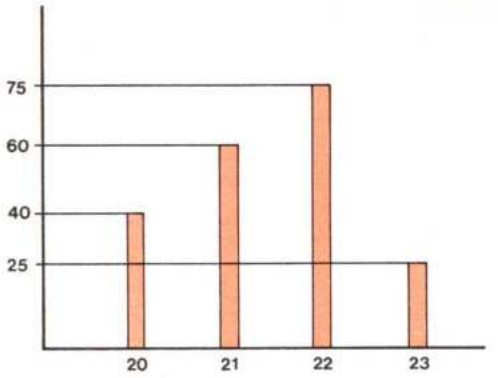


Diagrama poligonal acumulativa

3.4. *Diagrama de barras.*

Si sobre cada valor de la variable aleatoria representada en el eje de abscisas se traza un segmento, de longitud proporcional a su frecuencia absoluta o relativa, se obtiene una figura que recibe el nombre de *diagrama de barras.*

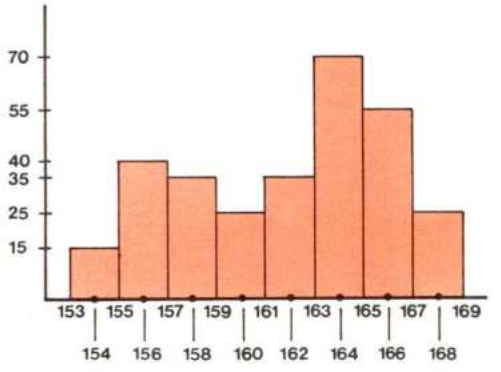
Al margen se ha dibujado el diagrama de barras de la función (x_i, f_i) del primer ejemplo (apartado **2.1.**) relativo a la venta de clavos de una ferretería.



3.5. *Histograma.*

Cuando la variable aleatoria X, viene dada por las marcas de clase, se levantan sobre cada intervalo de clase un rectángulo de altura proporcional a la frecuencia considerada (absoluta o relativa). La representación obtenida se llama histograma; se usa sobre todo para datos agrupados. El centro de la base de los rectángulos es la marca de clase.

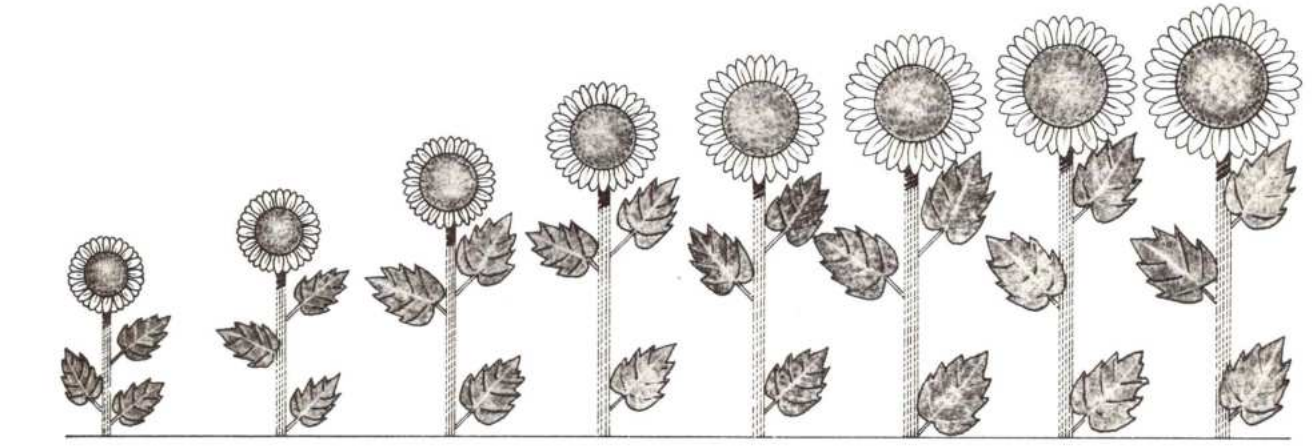
Al margen se ha representado la función (x_i, f_i) del ejemplo **2.4.**, que nos da la talla de los alumnos de una clase. Nótese bien en el dibujo el tamaño de la clase, y que x_i aquí, es la marca de clase.



3.6. *Pictograma.*

Con el mismo fundamento que el diagrama de barras, se pueden trazar sobre cada valor de la variable, un dibujo alusivo al problema que se estudia; la figura obtenida se llama *pictograma.* En el siguiente pictograma se indica nuestra producción de girasol desde el año 1967 hasta 1974.

9. Representa por un histograma las funciones (x_i, F_i), (x_i, h_i) y (x_i, H_i) del ejemplo 2.4.



4 Medidas de centralización

La tabla de frecuencias de una variable aleatoria, lo mismo que su representación gráfica, permiten formarse una idea cualitativa del experimento aleatorio que se estudia. Sin embargo, resulta difícil la comparación con otras tablas, por la gran cantidad de datos que contienen.

Por esta razón, interesa sustituir la función de distribución por unos números que indiquen las características más importantes de la misma. Estos números, índices o parámetros, caracterizan cuantitativamente la distribución.

La tendencia de los datos a agruparse en torno a un valor central se mide por medio de los *valores centrales.*

Los principales *valores centrales* que vamos a estudiar son:

media, *mediana* y *moda*

5 Media aritmética

5.1. *Cálculo de la media aritmética con datos simples.*

Sea $X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$ una variable aleatoria. Si la frecuencia absoluta es 1 para todo x_i, se define la *media aritmética* mediante la siguiente fórmula

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n}$$

Ejemplo:

- Sea $X = \{4, 6, 8, 6, 7\}$ la variable aleatoria de las notas de un alumno en las cinco evaluaciones; la media aritmética es:

$$\bar{x} = \frac{4 + 6 + 8 + 6 + 7}{5} = 6{,}2$$

5.2. *Cálculo de la media aritmética con datos agrupados.*

Sea la variable aleatoria $X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$

con frecuencias respectivas $F = \{f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n\}$

la *media aritmética de la variable* X se define así:

$$\bar{x} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 + \cdots + x_n f_n}{f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_n} = \frac{\Sigma x_i f_i}{\Sigma f_i} = \frac{\Sigma x_i f_i}{N}$$

10. Halla la media aritmética de la siguiente variable:

$$X = \{3, -1, 5, -7, -8, 3, 9\}$$

Variable aleatoria X_i	Frecuencia absoluta f_i	Frecuencia relativa h_i
x_1 x_2 x_3 $\vdots$ x_n	f_1 f_2 f_3 $\vdots$ f_n	h_1 h_2 h_3 $\vdots$ h_n
	$\Sigma f_i = N$	

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x_i f_i}{N}$$

Ejemplo:

En una clase de 1.º de B. U. P. la distribución de las notas en una evaluación está dada por la tabla del margen.

Notas x_i	**Frecuencia** f_i	$x_i f_i$
2	4	8
4	7	28
5	10	50
6	8	48
7	5	35
8	3	24
9	3	27
	$\Sigma f_i = 40$	$\Sigma f_i x_i = 220$

La media aritmética de esta distribución de frecuencias es:

$$\bar{x} = \frac{2\cdot 4 + 4\cdot 7 + 5\cdot 10 + 6\cdot 8 + 7\cdot 5 + 8\cdot 3 + 9\cdot 3}{4 + 7 + 10 + 8 + 5 + 3 + 3} =$$

$$= \frac{8 + 28 + 50 + 48 + 35 + 24 + 27}{40} = \frac{220}{40} = 5{,}5$$

Otro método de hallar la media aritmética se obtiene empleando las frecuencias relativas.

$$\bar{x} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + \cdots + x_n f_n}{N} =$$

$$= \frac{x_1 f_1}{N} + \frac{x_2 f_2}{N} + \cdots + \frac{x_n f_n}{N} =$$

$$= x_1 \frac{f_1}{N} + x_2 \frac{f_2}{N} + \cdots + x_n \frac{f_n}{N} \quad [1]$$

pero obsérvese que:

$$\frac{f_1}{N} = h_1, \frac{f_2}{N} = h_2, \ldots, \frac{f_n}{N} = h_n$$

Sustituyendo estos valores en la igualdad [1] resulta:

$$\bar{x} = x_1 h_1 + x_2 h_2 + \cdots + x_n h_n \quad [2]$$

La media del ejemplo anterior se ha calculado en la siguiente tabla aplicando la fórmula [2].

x_i	f_i	h_i	$x_i h_i$
2	4	0,100	0,200
4	7	0,175	0,700
5	10	0,250	1,250
6	8	0,200	1,200
7	5	0,125	0,875
8	3	0,075	0,600
9	3	0,075	0,675
	40	$\Sigma h_i = 1$	$\Sigma x_i h_i = 5{,}5$

5.3. *Cálculo de la media con datos agrupados en intervalos.*

En este caso, la media aritmética se obtiene, como en el caso anterior, tomando como variable aleatoria el conjunto de las marcas de clase.

Las tallas de veinte alumnos, medidas en centímetros, dan la siguiente tabla, donde se han considerado intervalos de clase:

Intervalos de clase	**Marcas de clase (Variable)**	**Frecuencias absolutas**	**Frecuencias relativas**		
	x_i	f_i	h_i	$x_i f_i$	$x_i h_i$
[153, 155[	154	1	0,05	154	7,7
[155, 157[	156	3	0,15	468	23,4
[157, 159[	158	2	0,10	316	15,8
[159, 161[	160	2	0,10	320	16
[161, 163[	162	5	0,25	810	40,5
[163, 165[	164	2	0,10	328	16,4
[165, 167[	166	3	0,15	498	24,9
[167, 169[	168	2	0,10	336	16,8
		$N = 20$	$\Sigma h_i = 1$	$\Sigma x_i f_i = 3.230$	$\bar{x} = 161,5 = \Sigma x_i h_i$

La media aritmética se calcula por los dos métodos de frecuencia absoluta, o frecuencia relativa. Los cálculos se disponen según se indican en la tabla anterior

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x_i f_i}{N} = \frac{3.230}{20} = 161,5$$

o también

$$\bar{x} = \Sigma x_i h_i = 161,5$$

11. Halla la media aritmética de la siguiente distribución

X	3	8	5	-1	-2	6
F	5	6	3	7	3	4

6 Mediana

6.1. *Se llama mediana de una variable aleatoria X finita, ordenada e impar al término que se halla en el centro de la variable.*

Si la variable aleatoria X es finita, ordenada y par, la mediana es la semisuma de los dos términos centrales.

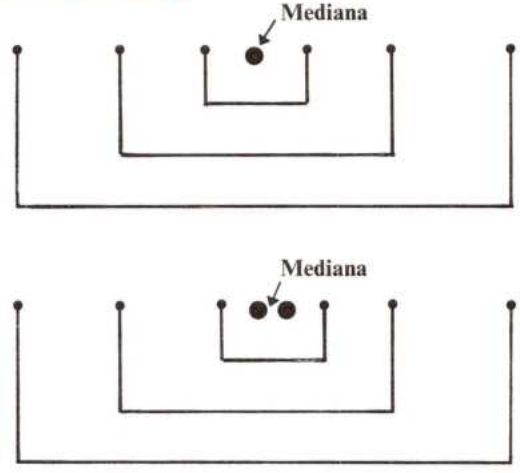
Sea la variable $X = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$

Su mediana es 7.

Sea ahora la variable

$$X = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$$

su mediana es la semisuma de los términos centrales 8 y 10, es decir 9.



6.2. *Cálculo de la mediana con datos simples.*

Dada la variable x_i finita, se ordenan de menor a mayor o al revés los valores de esta variable. Basta aplicar ahora la definición de mediana según que el número de datos sea par o impar.

6.3. *Cálculo de la mediana con datos agrupados.*

Consideremos la tabla de distribución de frecuencias del margen.

Variable	Frecuencias absolutas	Frecuencias acumuladas
x_i	f_i	F_i
1	3	3
2	5	8
3	4	12
4	3	15
	$\Sigma f_i = 15 = N$	$F_4 = N = 15$

Si queremos hallar la mediana se ordenan los datos y obtenemos

$$1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, \mathbf{2}, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4,$$

2 es el número central. Luego 2 es la *mediana*. Si el número de datos N es grande esta forma de cálculo de la mediana se hace laboriosa.

Para estos casos vamos a dar un método directo de cálculo obteniendo la mediana directamente de la tabla. Lo haremos con ejemplos.

Primer caso: N es impar.

Sea la distribución dada al margen $N = 31$, se procede así:

1.º Se divide el número N por 2.

$$N : 2 = 15{,}5$$

2.º Se busca en la tabla la frecuencia absoluta acumulativa

$$\frac{N}{2} + \frac{1}{2} \quad \text{aquí} \quad \frac{N}{2} + \frac{1}{2} = 16$$

3.º Finalmente se localiza en la columna de la variable x_i el valor que corresponde a la frecuencia acumulativa

$$\frac{N}{2} + \frac{1}{2}$$

La mediana en este caso es 3.

12. Halla la mediana de

$$X = \{-1, 3, -5, 7, 9, 13\}$$

13. Halla la mediana de

$$X = \{-1, 7, 0, 1, 3, -2, 4\}$$

Variable	Frecuencias absolutas	Frecuencias acumuladas
x_i	f_i	F_i
1	4	4
2	6	10
3	6	16
4	5	21
5	4	25
6	6	31
	$N = \Sigma f_i = 31$	$N = F_6 = 31$

Segundo caso: N es par.

Sea la distribución de frecuencias dada al margen $N = 102$.

Ahora se procede así:

1.º Se divide el número N por 2

$$N : 2 = 51$$

2.º Se busca en la tabla la frecuencia acumulativa $\frac{N}{2}$ y $\frac{N}{2} + 1$; aquí son 51 y 52.

3.º Se localizan en la columna de la variable x_i el valor que corresponde a las frecuencias $\frac{N}{2}$ y $\frac{N}{2} + 1$. En nuestra tabla: 4 y 4.

4.º Se calcula la media aritmética de estos valores de la variable.

La mediana en este caso es: 4.

Nótese que en los dos casos las frecuencias acumulativas F_i son la base para calcular la mediana.

Nota: Cuando se trata de datos agrupados se toma como variable x_i las marcas de clase.

Variable	Frecuencias absolutas	Frecuencias acumuladas
x_i	f_i	F_i
1	15	15
2	17	32
3	16	48
4	19	67
5	18	85
6	17	102
	$f_i = 102 = N$	$F_6 = 102 = N$

14. Dada la distribución

Variable	Frecuencia absoluta
x_i	f_i
1	17
3	21
5	35
7	45
9	15

Halla la mediana

7 Moda

Sea X una variable y F su distribución de frecuencias. *Se llama moda el valor de la variable con mayor frecuencias.*

Dada la distribución

X	20	21	22	23
F	40	60	75	25

la moda en este caso es 22.

La moda puede no existir y, si existe, puede no ser única.

La distribución

X	2	5	7	8	9	10
F	2	4	1	4	2	1

tiene por moda los valores 5 y 8.

La distribución

X	-1	3	4	-3	5
F	1	1	1	1	1

no tiene moda.

15. Dada la distribución de frecuencias

Variable	**Frecuencias absolutas**
x_i	f_i
3	15
-1	7
-3	5
6	8
4	5
9	12

Halla la moda y la mediana.

8 Medidas de dispersión

8.1. Con el conocimiento de los valores centrales se tiene una información de la tendencia central de la distribución; esta información es insuficiente, como se observa en los ejemplos siguientes:

En una oficina A { El sueldo del empleado A_1 es 50.000 ptas. / El sueldo del empleado A_2 es 20.000 ptas. / El sueldo del empleado A_3 es 8.000 ptas.

Sueldo medio de los empleados de la oficina A es:

$$\frac{50.000 + 20.000 + 8.000}{3} = \frac{78.000}{3} = 26.000 \text{ ptas.}$$

En otra oficina B { El sueldo del empleado B_1 es 38.000 ptas. / El sueldo del empleado B_2 es 25.000 ptas. / El sueldo del empleado B_3 es 15.000 ptas.

Sueldo medio de los empleados de la oficina B es:

$$\frac{38.000 + 25.000 + 15.000}{3} = \frac{78.000}{3} = 26.000 \text{ ptas.}$$

Se observa que el sueldo medio de los empleados es el mismo en ambas oficinas; sin embargo, es evidente que en la oficina B el reparto es más equitativo, es decir, en el caso de la oficina B la dispersión de los datos es menor.

La dispersión de una distribución se mide por el recorrido y las desviaciones.

8.2. *Recorrido o rango de una distribución*

La variable aleatoria en el caso de la oficina A es

$$X_A = \{50.000, 20.000, 8.000\}$$

El recorrido de X_A es $r = 50.000 - 8.000 = 42.000$

En el caso de la oficina B se tiene como variable aleatoria

$$X_B = \{38.000, 25.000, 15.000\}$$

$$r = 38.000 - 15.000 = 23.000$$

Se llama *recorrido o rango de una variable aleatoria X la diferencia entre el valor mayor y el menor.*

Se escribe: $r(X) = M - m$

siendo M = valor máximo de X
m = valor mínimo de X

16. Halla el recorrido de la siguiente distribución $X = \{1, 2, 3, 5, -1, 7, 9, -25\}$

17. Halla el recorrido de la siguiente distribución de $X = \{-1, -3, -5, -7, -9, -11\}$

8.3. *Desviaciones.*

La variable aleatoria de las notas de un alumno en matemáticas es: $X = \{6, 7, 5, 4, 8\}$

Su media aritmética $\bar{x} = 5$.

Las diferencias: 6-5, 7-5, 5-5, 4-5 y 8-5

se llaman *desviaciones respecto de la media.* En general, las diferencias entre cada valor x_i de X y un valor central, se llaman *desviaciones* respecto de ese valor central.

Teorema: Dada la variable aleatoria $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, la suma de las desviaciones respecto de la media aritmética $\bar{x}$ es cero.

En efecto:
$$\begin{aligned}(x_1 - \bar{x}) + (x_2 - \bar{x}) + \cdots + (x_n - \bar{x}) &= \\ = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) - (\bar{x} + \bar{x} + \cdots + \bar{x}) & \\ = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) - n\bar{x} & \\ = n\bar{x} - n\bar{x} = 0 &\end{aligned}$$

ya que $\dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \bar{x}$

8.4. *Desviación media.*

Las desviaciones, respecto de la media, nos dan una idea de la dispersión de la variable, aunque tienen dos inconvenientes:

- hay tantas desviaciones como valores de la variable
- tampoco es posible calcular la media de las desviaciones, porque, como se ha visto, la suma de las desciaciones es cero.

18. Dada la variable aleatoria $X = \{6, 7, 5, 4, 8\}$ halla las desviaciones respecto de la mediana.

19. Comprueba que la suma de las desviaciones respecto de la media es cero para

$$X = \{6, 7, 5, 4, 8\}$$

Por esta razón, se define la desviación media así: *se llama desviación media el cociente de la suma de los valores absolutos de las desviaciones entre las sumas de las frecuencias.*

Las fórmulas que nos da la desviación media son:

A) *Datos simples*

$$DM = \frac{\Sigma |x_i - \bar{x}|}{\Sigma f_i} = \frac{\Sigma |x_i - \bar{x}|}{N}$$

B) *Datos con frecuencias*

$$DM = \frac{\Sigma |x_i - \bar{x}\ f_i}{\Sigma f_i} = \frac{\Sigma |x_i - \bar{x}| f_i}{N}$$

C) *Datos agrupados*

$$DM = \frac{\Sigma |x_i - \bar{x}| f_i}{\Sigma f_i} = \frac{\Sigma |x_i - \bar{x}| f_i}{N}$$

donde x_i son las marcas de clase.

La siguiente tabla muestra como se deben hacer los cálculos:

Intervalo	**Marca de clase variable aleatoria**	**Frecuencia**			
	x_i	f_i	$x_i f_i$	$\lvert x_i - \bar{x}\rvert$	$\lvert x_i - \bar{x}\rvert f_i$
$[a_1, a_2[$	x_1	f_1	$x_1 f_1$	$\lvert x_1 - \bar{x}\rvert$	$\lvert x_1 - \bar{x}\rvert f_1$
$[a_2, a_3[$	x_2	f_2	$x_2 f_2$	$\lvert x_2 - \bar{x}\rvert$	$\lvert x_2 - \bar{x}\rvert f_2$
$[a_3, a_4[$	x_3	f_3	$x_3 f_3$	$\lvert x_3 - \bar{x}\rvert$	$\lvert x_3 - \bar{x}\rvert f_3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$[a_{n-1}, a_n]$	x_n	f_n	$x_n f_n$	$\lvert x_n - \bar{x}\rvert$	$\lvert x_n - \bar{x}\rvert f_n$
		$\Sigma f_i = N$	$\Sigma x_i f_i$	$\Sigma \lvert x_i - \bar{x}\rvert$	$\Sigma \lvert x_i - \bar{x}\rvert f_i$

Nota:

a) Si son datos simples $f_i = 1$.

b) En los casos *A* y *B* la primera columna no existe.

c) El cálculo de la media exige la cuarta columna.

20. Calcula la desviación media de

$$X = \{2, 8, 3, 7, 5\}$$

21. Calcula la desviación media de la siguiente distribución de frecuencias.

X	3	4	8	7	5
F	5	6	3	2	4

22. Las notas de un alumno son

$$X = \{4, 3, 6, 8, 9\}$$

Halla la desviación media.

8.5. *Varianza.*

La desviación media muchas veces no nos da un valor conveniente de la dispersión de una distribución de frecuencias.

Una variable aleatoria dada por los pesos de un grupo de alumnos es:

$$X_A = \{40, 45, 45, 50, 50, 70\}$$

Los pesos de otro grupo de alumnos es:

$$X_B = \{40, 45, 45, 50, 60, 60\}$$

La media aritmética de X_A es igual a la de X_B

$$\bar{x}_A = \bar{x}_B = 50$$

Las desviaciones medias de X_A y X_B son también iguales.

$$\mathrm{DM}_A = \mathrm{DM}_B = 6{,}66$$

Obsérvese que en este caso, ni la media aritmética ni la desviación media sirven para detectar de una manera eficaz las desviaciones. Así en X_A hay un alumno de 70 kg que presenta una desviación mayor que cualquier otro del conjunto X_B.

Para evitar este inconveniente estudiaremos otra medida de dispersión: la *varianza.*

Se llama varianza de una distribución de frecuencias de una variable aleatoria X el cociente de la suma de los cuadrados de las desviaciones entre la suma de las frecuencias.

Por tanto, las fórmulas que nos dan la *varianza* son:

A) *Datos simples*

$$S^2 = \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{n}$$

B) *Datos con frecuencias*

$$S^2 = \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2 f_i}{\Sigma f_i} = \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2 f_i}{N}$$

C) *Datos agrupados*

$$S^2 = \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2 f_i}{N}$$

donde x_i es, ahora, la marca de clase.

23. Comprueba que la media x_A es 50 y que la media $\bar{x}_B$ es también 50.

24. Comprueba que las desviaciones medias del ejemplo son

DM de X_A es igual 6,66
y DM de X_B igual también a 6,66

25. Un alumno tiene por notas la variable aleatoria $X = \{3, 6, 2, 1, 7, 5\}$
Calcula la varianza.

26. El peso de un grupo de alumnos es:

$$X = \{40, 45, 45, 50, 50, 70\}$$

Calcula la varianza.

La siguiente tabla muestra cómo se deben disponer los datos y hacer los cálculos:

Intervalo	**Marca de clase**	**Frecuencia**				
	x_i	f_i	$x_i f_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 f_i$
$[a_1, a_2[$	x_1	f_1	$x_1 f_1$	$x_1 - \bar{x}$	$(x_1 - \bar{x})^2$	$(x_1 - \bar{x})^2 f_1$
$[a_2, a_3[$	x_2	f_2	$x_2 f_2$	$x_2 - \bar{x}$	$(x_2 - \bar{x})^2$	$(x_2 - \bar{x})^2 f_2$
$[a_3, a_4[$	x_3	f_3	$x_3 f_3$	$x_3 - \bar{x}$	$(x_3 - \bar{x})^2$	$(x_3 - \bar{x})^2 f_3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			
$[a_{n-1}, a_n]$	x_n	f_n	$x_n f_n$	$x_n - \bar{x}$	$(x_n - \bar{x})^2$	$(x_n - \bar{x})^2 f_n$
		$\Sigma f_i = N$	$\Sigma x_i f_i$	$\Sigma(x_i - \bar{x}) = 0$	$\Sigma(x_i - \bar{x})^2$	$\Sigma(x_i - \bar{x})^2 f_i$

Nota: En los casos *A* y *B* la primera columna no existe.

8.6. *Desviación típica.*

La raíz cuadrada positiva de la varianza se llama *desviación típica.*

Las fórmulas que nos dan la desviación típica son:

A) *Datos simples*

$$S = \sqrt{\frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

B) *Datos con frecuencias*

$$S = \sqrt{\frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2 f_i}{N}}$$

C) *Datos agrupados*

$$S = \sqrt{\frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2 f_i}{N}}$$

donde x_i es, ahora, la marca de clase.

Observación:

La varianza y desviación típica se pueden calcular con la frecuencia relativa.

$$D_1 = \sqrt{(x_1 - \bar{x})^2 \cdot h_1 + (x_2 - \bar{x})^2 \cdot h_2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2 \cdot h_n}$$

La desviación típica, junto con la media aritmética, son los números más representativos de la distribución de frecuencias de una variable aleatoria.

27. Halla la desviación típica de la variable aleatoria $X = \{3, 6, 1, 7, 5\}$

28. Halla la desviación típica de la variable aleatoria $X = \{4, 10, 16, 22, 28, 34\}$

Ejercicios y cuestiones

29. Se lanzan dos dados. Sea ξ la variable aleatoria que hace corresponder a cada punto (x, y) del espacio muestral E el máximo de sus valores, es decir, $\xi(x, y) = \max(x, y)$. Halla:

a) El conjunto imagen $\xi(E)$
b) $\xi^{-1}(2)$.
c) El número de puntos de $\xi^{-1}(6)$.

30. Se lanzan tres monedas al aire. Sea ξ la variable aleatoria que hace corresponder a cada punto muestral de E el número de caras. Halla:

a) El conjunto imagen $\xi(E) = X$.
b) $\xi^{-1}(3)$.
c) El número de puntos de $\xi^{-1}(3)$.

31. Se tiene la siguiente distribución de las tallas de los alumnos de un centro en cm.

Intervalos de clase	[145, 150[	[150, 155[	[155, 160[	[160, 165[	[165, 170[	[170, 175[	[175, 180[
Frecuencias absolutas	51	95	141	152	120	88	58

Se pide:

a) La tabla de frecuencias, f_i, F_i, h_i, H_i.
b) El histograma (x_i, h_i).
c) Cálculo de la media.
d) Cálculo de la moda.
e) Cálculo de la mediana.
f) Cálculo de la desviación típica.

32. Demuestra que:

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i$$

33. Demuestra que:

$$\sum_{i=1}^{n} ax_i = a \sum_{i=1}^{n} x_i$$

34. Demuestra que

$$\sum_{i=1}^{n} (ax_i + b) = a \sum_{i=1}^{n} x_i + nb$$

35. Se tiran dos dados al aire y se anota la suma de los puntos que salen. Se pide la probabilidad de cada valor de la variable.

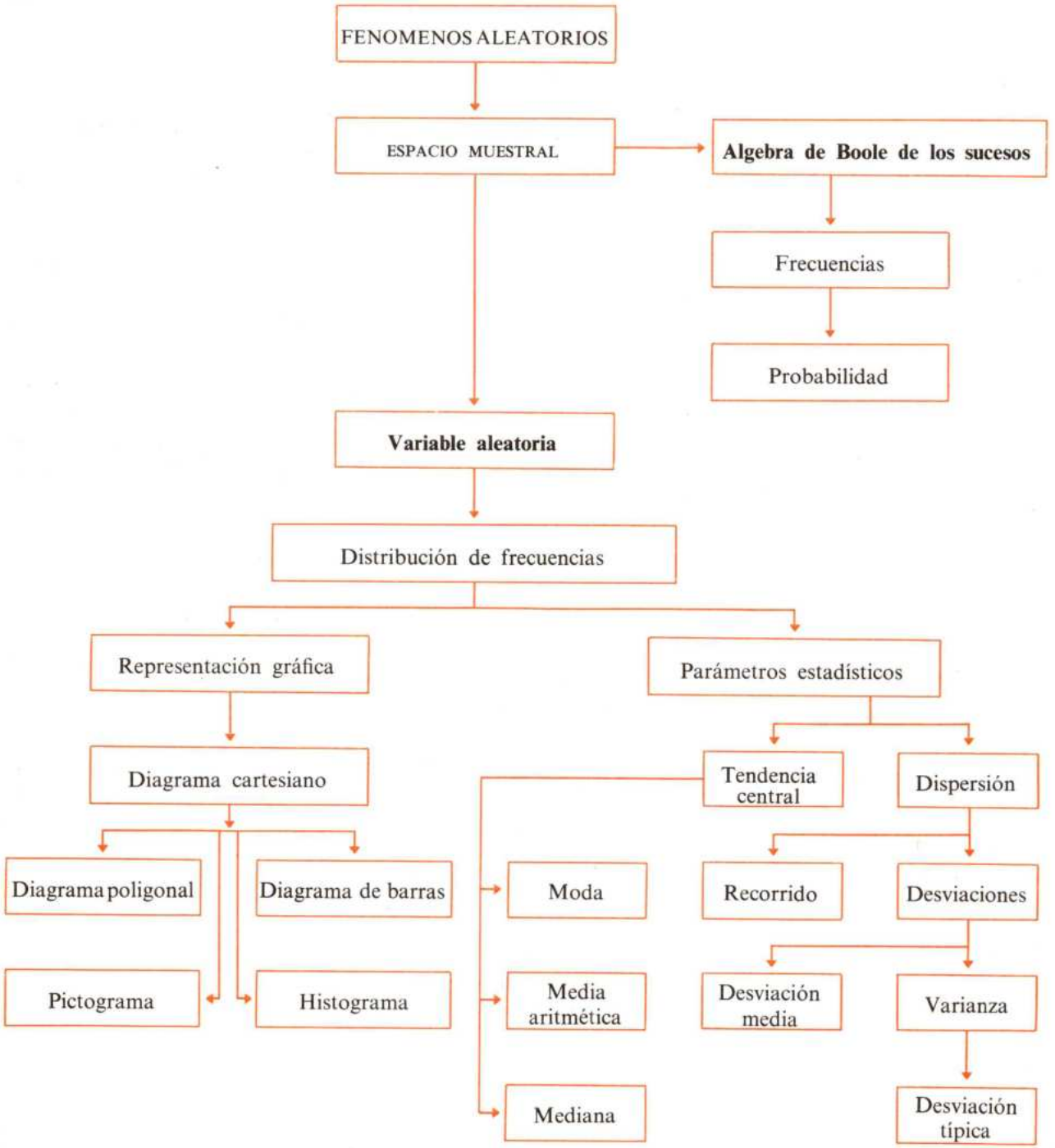
$$X = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

es decir, halla los valores de la siguiente distribución de probabilidades de la variable:

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p_i	$p(2)$	$p(3)$	$p(4)$	$p(5)$	$p(6)$	$p(7)$	$p(8)$	$p(9)$	$p(10)$	$p(11)$	$p(12)$

DIAGRAMA ESTRUCTURAL DE LA UNIDAD

ESTADISTICA



Unidad 9

NUMEROS COMPLEJOS

En el cuerpo de los números reales la ecuación $x^2 + 1 = 0$ no posee solución, es decir, no existe ningún número real que la verifique, ya que si tal número existiese debería ser $x^2 = -1$, lo cual no es posible porque el cuadrado de todo número real es otro número positivo.

El propósito de esta *unidad* es construir un cuerpo que contenga un subconjunto isomorfo a $\mathbb{R}$, en el que la ecuación $x^2 + 1 = 0$ posea solución. Dicho cuerpo se llamará *cuerpo de los números complejos* y se designa por $\mathbb{C}$.

En el primer tema de esta Unidad se estudia la construcción de $\mathbb{C}$ y su estructura de cuerpo.

En el segundo se propone una forma útil para manejar los elementos de $\mathbb{C}$: la forma binómica.

Finalmente, en el tercer tema se introduce una representación geométrica de los elementos de $\mathbb{C}$ que permite ver de manera más intuitiva muchas de las propiedades de dicho cuerpo.

Tema 22

1. Definición e igualdad de números complejos.
2. Adición de números complejos.
3. Propiedades de la adición de números complejos.
4. El grupo $(\mathbb{C}, +)$.
5. Diferencia de números complejos.
6. Multiplicación de números complejos.
7. Propiedades de la multiplicación de números complejos.
8. El anillo $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.
9. Elemento inverso.
10. División de números complejos.

Tema 23

1. Isomorfismo de $\mathbb{R}$ con una parte de $\mathbb{C}$.
2. La ecuación $x^2 = -1$.
3. Forma binómica de un número complejo.
4. Parte real y parte imaginaria de un número complejo.
5. Adición de números complejos en forma binómica.
6. Diferencia de números complejos en forma binómica.
7. Multiplicación de números complejos en forma binómica.
8. Conjugado de un número complejo.
9. Propiedades del conjugado.
10. Cocientes de números complejos en forma binómica.
11. Producto de un número real por un número complejo.
12. Potencias de números complejos.
13. Raíz cuadrada de un número complejo.

Tema 24

1. Módulo de un número complejo.
2. Propiedades del módulo de un número complejo.
3. Representación geométrica de un número complejo.
4. Interpolación geométrica de la suma de complejos.
5. Interpolación geométrica del producto por i.

Tema 22

EL CUERPO DE LOS NUMEROS COMPLEJOS

En este tema se estudia la construcción del cuerpo de los números complejos a partir del conjunto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Este conjunto de todos los pares de números reales da lugar, entre otras, a dos estructuras importantes muy distintas, según sean las operaciones que se definan entre sus elementos.

a) *Una estructura de cuerpo.*
b) *Una estuctura de espacio vectorial.*

El conjunto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *se convierte en un cuerpo (cuerpo de los números complejos) cuando en él se definen la adición y multiplicación que aparecen en este tema.*

En este caso, los elementos de este conjunto se llaman números complejos. Cuando en el conjunto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *se define la misma adición anterior y una multiplicación de números reales por elementos de* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, *este conjunto se convierte en espacio vectorial y sus elementos se llaman vectores.*

Resulta así que un elemento $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *puede considerarse como un vector o como un número complejo, según sean las operaciones definidas en ese conjunto.*

1 Definición e igualdad de números complejos

1.1. Consideremos el producto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, es decir, el conjunto de todos los pares ordenados (a, b) con $a, b \in \mathbb{R}$.

En este conjunto se van a definir dos operaciones que le darán estructura de cuerpo. Este cuerpo se llamará el *cuerpo de los números complejos*, y sus elementos *números complejos*.

El conjunto de los números complejos se simboliza por $\mathbb{C}$

$$\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

Cada número complejo es por definición un par ordenado de números reales.

Dos números complejos (a, b) y (c, d) son iguales cuando, y sólo cuando, tienen sus componentes respectivamente iguales.

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow (a = c) \text{ y } (b = d)$$

Ejemplo:

- Se sabe que los números complejos $(x, 3)$ y $(-2, y)$ son iguales. Calculemos x e y. De $(x, 3) = (-2, y)$ resulta: $x = -2$ y $3 = y$.

1. Calcula x e y sabiendo que $(2x, 6) = (8, 12y)$.
2. Calcula a y b sabiendo que son iguales los números complejos

$$(2a + 6,\ 3b + 8) \text{ y } (12, 6)$$

2 Adición de números complejos

Sean (a, b) y (a', b') dos números complejos; se define su suma del modo siguiente: $(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$

Como la suma de dos números reales es otro número real, resulta que $(a + a', b + b') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, luego la adición definida es una *operación interna en* $\mathbb{C}$.

Ejemplos:

- $(3, 0) + (2, 1) = (3 + 2,\ 0 + 1) = (5, 1)$
- Consideremos el número complejo (x, y) tal que

$$(x, y) + (2, 0) = (5, 1)$$

Calculemos x e y

$$(x, y) + (2, 0) = (x + 2,\ y + 0) = (x + 2,\ y)$$

De la igualdad $(x + 2,\ y) = (5, 1)$ resulta

$$\begin{cases} x + 2 = 5 \\ y = 1 \end{cases} \quad \text{de donde} \quad x = 3,\ y = 1$$

3. Suma los números complejos (2, 5) y (7, −4).

4. Calcula la suma $(2, 3) + [(-1, 1) + (5, 0)]$ y comprueba que coincide con la suma

$$[(2, 3) + (-1, 1)] + (5, 0)$$

5. Encuentra el número complejo tal que sumado con el (1,3) dé el (0,0).

3 Propiedades de la adición de números complejos

La adición de números complejos tiene las siguientes propiedades:

3.1. *Asociativa.*

$$(a, b) + [(c, d) + (m, p)] = [(a, b) + (c, d)] + (m, p)$$

Podemos llegar al segundo miembro partiendo del primero como se indica en la demostración esquemática del margen, en la que se ha utilizado la definición de adición de números complejos en los pasos ①, ②, ④ y ⑤ y la propiedad asociativa de la adición de los números reales en ③.

$$\begin{aligned} &(a,b)+[(c,d)+(m,p)] \overset{①}{=} (a,b)+(c+m,d+p) \overset{②}{=} \\ &= (a + (c + m),\ b + (d + p)) \overset{③}{=} \\ &= ((a + c) + m,\ (b + d) + p) \overset{④}{=} \\ &= (a + c,\ b + d) + (m, p) \overset{⑤}{=} \\ &= [(a, b) + (c, d)] + (m, p) \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$(a, b)+[(c, d) + (m, p)]=[(a, b)+(c, d)]+(m, p)$$

3.2. *Conmutativa.*

$$(a, b) + (c, d) = (c, d) + (a, b)$$

También aquí se llega al segundo miembro partiendo del primero, aplicando en ① y ③ la definición de adición de números complejos y, en ②, la conmutatividad de la adición de números reales.

$$\begin{aligned} (a, b) + (c, d) &\overset{①}{=} (a + c, b + d) \overset{②}{=} \\ &= (c + a, d + b) \overset{③}{=} (c, d) + (a, b) \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$(a, b) + (c, d) = (c, d) + (a, b)$$

3.3. *Existe elemento neutro.*

El elemento neutro respecto de la adición es (0, 0), ya que para cualquier número complejo (a, b) se tiene:

$$(a, b) + (0, 0) = (a + 0, b + 0) = (a, b)$$

3.4. *Todo número complejo tiene un opuesto.*

El opuesto del número complejo (a, b) es $(-a, -b)$, ya que

$$(a, b) + (-a, -b) = (0, 0).$$

El opuesto de (a, b) se escribe $-(a, b)$

$$-(a, b) = (-a, -b)$$

6. Comprueba la propiedad asociativa y conmutativa de la adición con los números complejos (2, 3), (4, −2) y (6, 1).

7. Haz las siguientes sumas:

(2, −3) + (0, 0); (4, −5) + (0, 0);
(−3, 4) + (3, −4); (2/3, −5) + (−2/3, 5)

8. Escribe los opuestos de los números complejos (2, 4), (−8, −3), (−2, 1).

4 El grupo ($\mathbb{C}$, +)

En el cuadro siguiente se resumen las propiedades de la adición que permiten afirmar que el par $(\mathbb{C}, +)$ es un grupo abeliano.

$(a, b) \in \mathbb{C}$ $(a', b') \in \mathbb{C}$ $(a'', b'') \in \mathbb{C}$ $(0, 0) \in \mathbb{C}$		**CONJUNTO:** $\mathbb{C} =$ { **números complejos** }	**Grupo** / **Grupo abeliano**
		OPERACION DEFINIDA: ADICION (+)	
PROPIEDADES	**Asociativa**	$(a, b) + [(a', b') + (a'', b'')] = [(a, b) + (a', b')] + (a'', b'')$	
	Elemento neutro (0, 0)	$(a, b) + (0, 0) = (0, 0) + (a, b) = (a, b)$	
	Cada número complejo (a, b) **tiene un opuesto** $(-a, -b)$	$(a, b) + (-a, -b) = (0, 0)$	
	Conmutativa	$(a, b) + (a', b') = (a', b') + (a, b)$	

$(\mathbb{C}, +)$ es un «grupo abeliano»

5 Sustracción de números complejos

La diferencia de dos números complejos (a, b) y (c, d) se define como el complejo que resulta de sumar el primero con el opuesto del segundo

$$(a, b) - (c, d) = (a, b) + (-c, -d)$$

Ejemplos:

- $(3, 4) - (-2, 5) = (3, 4) + (2, -5) = (5, -1)$

$$\left(\frac{2}{3}, -1\right) - \left(-\frac{1}{2}, \frac{2}{5}\right) = \left(\frac{2}{3}, -1\right) + \left(\frac{1}{2}, -\frac{2}{5}\right) =$$

$$= \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}, -1 - \frac{2}{5}\right) = \left(\frac{7}{6}, -\frac{7}{5}\right)$$

9. Halla el opuesto del número complejo $(-1, 1)$. ¿Cuál es el opuesto del número complejo $(0, 0)$?

10. Se tiene un número complejo (x, y) tal que sumado consigo mismo vuelve a dar él mismo. ¿Cuál es dicho número complejo?

11. Halla x e y sabiendo que:

$$(x, 3) + (y, 5) = (3, 8)$$
$$(1, 2x) + (y, y + 1) = (3, 5)$$

12. Calcula $(-3, -7) - (8, -2); (5, -1) - (2, 7)$

13. Calcula $(-a, c) - (-a, -c)$.

6 Multiplicación de números complejos

Sean (a, b) y (a', b') dos números complejos; se define su producto del modo siguiente:

$$(a, b)\ (a', b') = (aa' - bb', ab' + ba')$$

Como el producto, la suma y la diferencia de números reales son operaciones internas en $\mathbb{R}$, $aa' - bb' \in \mathbb{R}$ y $ab' + ba' \in \mathbb{R}$, luego $(aa' - bb', ab' + ba') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, y la multiplicación definida es una operación interna en $\mathbb{C}$.

Ejemplos:

- $(3, 4) \cdot (2, 6) = (3 \cdot 2 - 4 \cdot 6, 3 \cdot 6 + 4 \cdot 2) =$
  $(6 - 24, 18 + 8) = (-18, 26)$.
- $(1, 2) \cdot (2, 1) = (2 - 2, 1 + 4) = (0, 5)$.
- $(6, 8) \cdot (1, 0) = (6 \cdot 1 - 8 \cdot 0, 6 \cdot 0 + 8 \cdot 1) = (6, 8)$
- $(a, b) \cdot (c, 0) = (a \cdot c - b \cdot 0, a \cdot 0 + b \cdot c) = (a\,c, b\,c)$
- Halla x, si $(x, 2) \cdot (1, 3) = (-5, 5)$.
  Se tiene: $(x - 6, 3x + 2) = (-5, 5)$ de donde $x = 1$.

14. Sean los números complejos

$$\alpha = (0, 1), \quad \beta = (-1, 1), \quad \gamma = (2, 0).$$

Calcula:

$$\alpha(\beta\gamma) \quad ; \quad (\alpha\beta)\gamma \quad ; \quad \alpha(\beta + \gamma) \quad ; \quad \alpha\beta + \alpha\gamma$$

y comprueba que:

$$\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma \quad ; \quad \alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$$

7 Propiedades de la multiplicación de números complejos

Se pueden demostrar las siguientes propiedades de la multiplicación de números complejos.

7.1. *Asociativa.*

$$(a, b) \cdot [(c, d) \cdot (m, p)] = [(a, b) \cdot (c, d)] \cdot (m, p)$$

Comprueba esta propiedad con el siguiente ejemplo:

- $(2, 3)\ [(3, 4)\ (-2, 5)] = [(2, 3)\ (3, 4)]\ (-2, 5)$

7.2. *Conmutativa.*

$$(a, b) \cdot (a', b') = (a', b') \cdot (a, b)$$

Se pasa del primer miembro al segundo utilizando la definición de multiplicación de números complejos en ① y ③, y la propiedad conmutativa de la suma y del producto de números reales en ②. (Ver el esquema de la derecha.)

7.3. *Existe elemento neutro.*

El elemento neutro respecto de la multiplicación es $(1, 0)$.

En efecto, al multiplicar el número complejo $(1, 0)$ por otro número cualquiera (a, b) deja a éste invariante

$$(a, b) \cdot (1, 0) = (a \cdot 1 - b \cdot 0,\ a \cdot 0 + b \cdot 1) = (a, b)$$

$$(a, b) \cdot (1, 0) = (a, b)$$

7.4. *Propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición.*

$$(a, b) \cdot [(c, d) + (p, q)] = (a, b) \cdot (c, d) + (a, b) \cdot (p, q)$$

Desarrollando ambos miembros se llega al mismo número complejo, como se demuestra en el esquema del margen.

15. Halla el número complejo (x, y) tal que

$$(x, y)(3, 1) = (1, 2)$$

16. Halla x para que $(x, 3)^2 = (0, 18)$.

Recuerda que $(x, 3)^2 = (x, 3)(x, 3)$

$$(a, b) \cdot (a', b') \overset{①}{=} (aa' - bb', ab' + ba') \overset{②}{=}$$
$$= (a'a - b'b,\ a'b + b'a) \overset{③}{=} (a'b')\ (a, b)$$

$$(a, b) \cdot (a', b') = (a', b') \cdot (a, b)$$

$$(a, b) \cdot [(c, d) + (p, q)] = (a, b) \cdot (c + p, d + q)$$
$$= (a(c + p) - b(d + q),\ a(d + q) + b(c + p) =$$
$$= (ac + ap - bd - bq,\ ad + aq + bc + bp)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) + (a, b) \cdot (p, q) =$$
$$= (ac - bd,\ ad + bc) + (ap - bq + aq + bp) =$$
$$= (ac - bd + ap - bq,\ ad + bc + aq + bp)$$

$$(a, b) \cdot [(c, d) + (p, q)] = (a, b) \cdot (c, d) +$$
$$+ (a, b) \cdot (p, q)$$

8 El anillo $(\mathbb{C}, +, \cdot)$

Se ha probado que $(\mathbb{C}, +)$ es un grupo abeliano.

Como la multiplicación tiene las propiedades estudiadas en **7.1.**, **7.2.** y **7.3.** resulta que $(\mathbb{C}, \cdot)$ es un semigrupo conmutativo y unitario.

Al ser la multiplicación distributiva respecto de la adición, resulta $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *es un anillo conmutativo y unitario.*

Para demostrar que $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ es un cuerpo, hay que probar que, todo elemento de $\mathbb{C}$, distinto de $(0, 0)$, tiene inverso.

9 Elemento inverso

9.1. *Todo número complejo* $(a, b) \neq (0, 0)$ *tiene un inverso.* Si llamamos (x, y) al inverso de (a, b) se habrá de verificar:

$(a, b) \cdot (x, y) = (1, 0)$, es decir, $(ax - by, ay + bx) = (1, 0)$;

Aplicando la definición de igualdad de números complejos resulta el siguiente sistema:

$$\begin{cases} ax - by = 1 \\ ay + bx = 0 \end{cases}$$

En el esquema del margen se indica la resolución de este sistema.

En ① y ② se ha multiplicado por b y a respectivamente.

En ③ se han restado las dos ecuaciones.

En ④ se ha sacado el factor común y. Como $(a, b) \neq (0, 0)$ resulta: $a^2 + b^2 \neq 0$, y por esta razón se puede dividir por $a^2 + b^2$ en ⑤.

La solución del sistema es: $y = \dfrac{-b}{a^2 + b^2}$; $\quad x = \dfrac{a}{a^2 + b^2}$

Si se representa por $(a, b)^{-1}$ el inverso de (a, b) se tiene

$$(a, b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right)$$

9.2. Designemos por $\mathbb{C}^*$ el conjunto $\mathbb{C}$ sin el $(0, 0)$:

$$\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{(0, 0)\}$$

El par $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ es un grupo conmutativo o abeliano.

$$\left.\begin{matrix} ax - by = 1 \\ ay + bx = 0 \end{matrix}\right\}$$

$ax - by = 1$ ① $\Rightarrow$ $bax - b^2y = b$

$ay + bx = 0$ ② $\Rightarrow$ $a^2y + bax = 0$

③ $\Rightarrow$ $a^2y + b^2y = -b$

④ $\Rightarrow$ $y(a^2 + b^2) = -b$

⑤ $\Rightarrow$ $y = \dfrac{-b}{a^2 + b^2}$ $\Rightarrow$ $x = \dfrac{a}{a^2 + b^2}$

10 División de números complejos

Se define el cociente de α por $\beta (\beta \neq (0, 0))$ como el producto de α por el inverso de β, es decir: $\alpha/\beta = \alpha \cdot \beta^{-1}$

Ejemplo:

- Sea $\alpha = (1, 0)$ y $\beta = (2, -3)$.

  Calculamos primero $\beta^{-1} = \left(\dfrac{2}{13}, \dfrac{3}{13}\right)$,

  ya que $a^2 + b^2 = 2^2 + (-3)^2 = 13$

  entonces $\dfrac{\alpha}{\beta} = \alpha\beta^{-1} = (1, 0) \cdot \left(\dfrac{2}{13}, \dfrac{3}{13}\right) = \left(\dfrac{2}{13}, \dfrac{3}{13}\right)$

17. Dados los complejos

$\alpha = (-1, 2)$ y $\beta = (3, -1)$,

calcula: $(\alpha\beta)^{-1}$, α^{-1} y β^{-1}

y comprueba que $(\alpha\beta)^{-1} = \alpha^{-1}\beta^{-1}$

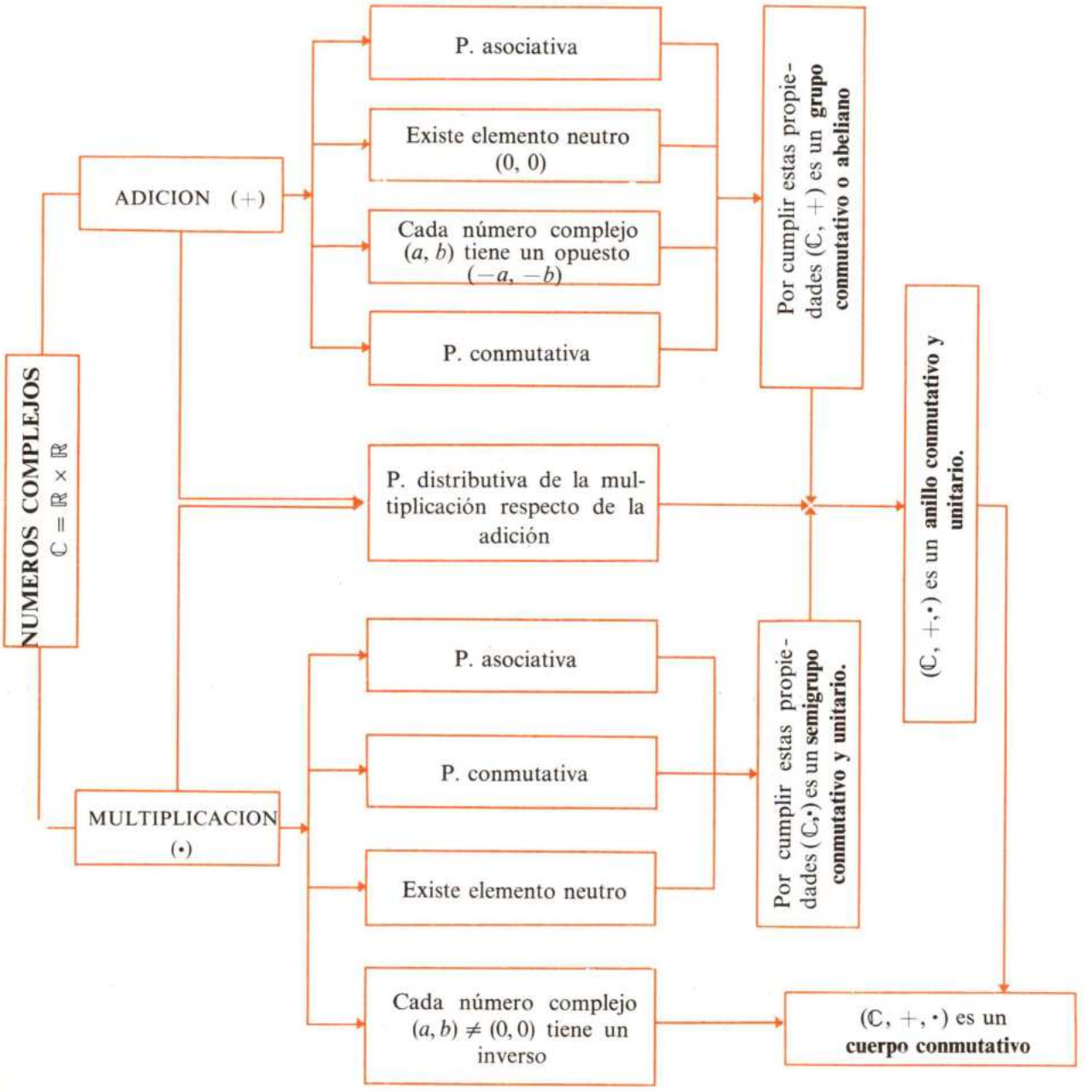
18. Calcula el cociente $\dfrac{\alpha}{\beta}$ de los complejos

$\alpha = (1, -1)$, $\quad \beta = \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\right)$

19. Sea el complejo $\alpha = (a, b)$. ¿Cuánto vale el cociente $\dfrac{\alpha}{\beta}$ siendo $\beta = (0, 1)$?

11 El cuerpo $(\mathbb{C}, +, \cdot)$

En el siguiente esquema se resumen las propiedades de la adición y multiplicación de números complejos que permiten afirmar que $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ es un cuerpo.



Ejercicios y cuestiones

20. Calcula el número complejo (a, b) tal que $(a, b) - (3, 2) = (2, 6)$; halla después el inverso de este número complejo.

21. ¿Cuál de los números complejos $z_1 = \left(\frac{2}{5}, \frac{-1}{5}\right)$, $z_2 = \left(\frac{3}{5}, \frac{-1}{5}\right)$

es el inverso del número complejo $z_3 = (2, 1)$?

22. Calcula los siguientes productos:

$$(6, 0)\cdot(0, 1); \quad (-3, 0)\cdot(0, 1); \quad (1, 0)\cdot(0, 1); \quad (3, 2)\cdot(1, 0)$$
$$(3, 2)\cdot(0, 1); \quad (4, 1)\cdot(4, -1); \quad (2, 3)\cdot(2, -3)$$

23. Haz las siguientes sumas y di qué propiedad se comprueba con ellas

$$(-2, 5) + (2, -5); \quad (3, -7) + (-3, 7); \quad (4, -2) + (-4, 2); \quad (5, 9) + (-5, -9).$$

24. Halla los complejos (a, b) y (c, d) sabiendo que

$$(3, 2) + (a, b) = (-6, 3)$$
$$(5, -2) - (c, d) = (8, 6)$$

25. Sean $z_1 = (2, 3)$; $z_2 = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$. Calcula: $z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 \cdot z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$; $\frac{z_2}{z_1}$

26. Sea $\alpha = (2, 0)$, $\beta = (0, 3)$
Calcula:

a) $(\alpha + \beta)^{-1}$; b) $\alpha - \beta^{-1}$; c) $\alpha \cdot \beta^{-1}$; d) $\frac{\alpha}{\beta}$

27. Calcula $(6, 3)\cdot(-5, 0)$; $(x, y)\cdot(a, 0)\cdot(3, 1)\cdot(3, 1)\cdot(3, 1)$.
Dado el número complejo (6, 3), encuentra otro número complejo (x, y) tal que

$$(6, 3)\cdot(x, y) = (30, 0)$$

28. ¿Puede dar (0, 0) la suma de dos números complejos? Escribe dos números complejos que cumplan esta condición. ¿Cómo se llaman estos dos números complejos?

29. Calcula el número complejo (a, b) sabiendo que $(2, -7) + (a, b) = (0, 3)$.

30. Escribe el opuesto de cada uno de los siguientes números complejos.

$$(-2, 5); \left(-\frac{3}{5}, -6\right); (2, -4), (1,1), (0, 0), (3, -3)$$

¿Hay algún número complejo cuyo opuesto coincida con él mismo?

31. Dados los números complejos $\alpha = (3, -2)$ y $\beta = (4, 1)$. Calcula: $\alpha - \beta$ y $\alpha \cdot \beta$

32. Sean $\alpha = (1, 1)$, $\beta = (-1, -1)$; $\gamma = (2, -2)$. Halla un complejo δ tal que $\delta \cdot (\alpha - \gamma) = \beta^2$.

33. Escribe el inverso de cada uno de los siguientes números complejos

$$(2, 0), (0, 2), (1, 1), (1, 3), (0, 1), (1, 0)$$

¿Hay algún número complejo cuyo inverso coincida con él mismo?

34. Calcula x sabiendo que $(2, x)^2 = (0, 8)$.

35. Escribe un número complejo que no tenga inverso. ¿Hay algún otro número complejo que no tenga inverso?

36. Calcula $z_1 - z_2$, $z_1 + z_2$ y $\frac{z_1}{z_2}$ donde $z_1 = (1, 0)$ y $z_2 = (0, 1)$

Tema 23

FORMA BINOMICA DEL NUMERO COMPLEJO

Al construir el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales a partir del conjunto $\mathbb{Z}$ de los enteros, se estableció un isomorfismo de $\mathbb{Z}$ en un subconjunto de $\mathbb{Q}$, concretamente en

$$\mathbb{Q}_{(1)} = \left\{ \frac{n}{1} \Big/ n \in \mathbb{Z} \right\};$$

mediante este isomorfismo se hacía corresponder a $n \in \mathbb{Z}$ el número racional $\frac{n}{1}$; de este modo se puede identificar el entero n con $\frac{n}{1}$, de forma que el número racional $\frac{n}{1}$ se escribe n. En este tema, y de forma totalmente análoga, se va a establecer entre el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales y un subconjunto de $\mathbb{C}$ un isomorfismo que nos va a permitir indentificar cada número complejo de la forma $(a, 0)$ con el número real a.

1 Isomorfismo de $\mathbb{R}$ con una parte de $\mathbb{C}$

Sea $\mathbb{C}_0 = \{(a, 0)/a \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$, consideremos la aplicación $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}_0$ definida por $f(a) = (a, 0)$; se tiene

$$f(a + b) = (a + b, 0) = (a, 0) + (b, 0) = f(a) + f(b)$$
$$f(ab) = (ab, 0) = (a, 0) \cdot (b, 0) = f(a) \cdot f(b)$$

Además f es inyectiva y suprayectiva, y por tanto, biyectiva.

f es inyectiva. Supongamos $f(a) = f(b)$, entonces $(a, 0) = (b, 0)$ de donde $a = b$ y f resulta inyectiva.

f es suprayectiva. En efecto sea $(a, 0) \in \mathbb{C}_0$, entonces basta tomar $a \in \mathbb{R}$ y $f(a) = (a, 0)$, es decir, f es suprayectiva.

Hemos visto entonces que f verifica:

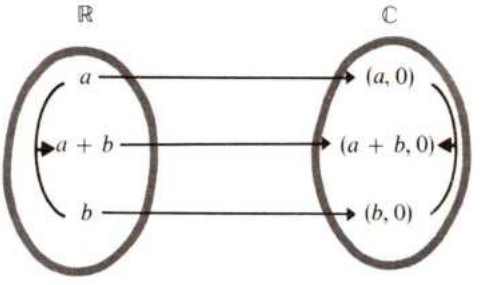
$f(a + b) = f(a) + f(b)$
$f(ab) = f(a) \cdot f(b)$
f es biyectiva.

Luego f es un isomorfismo de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}_0$.

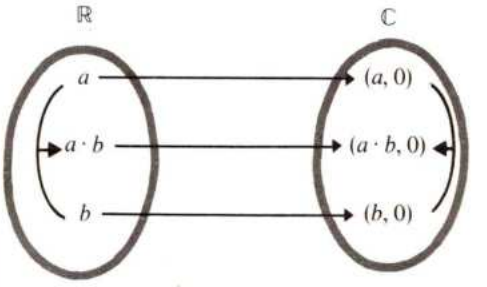
Ejemplo:

- Calculemos el producto $(8, 0) \cdot (6, 0)$ haciendo uso del isomorfismo entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}_0$.

  Como $8 \cdot 6 = 48$ resulta que $(8, 0) \cdot (6, 0) = (48, 0)$.



$f(a + b) = f(a) + f(b)$



$f(ab) = f(a)\, f(b)$

Resumiendo: $\mathbb{C}$ *contiene un subconjunto* $\mathbb{C}_0$ *isomorfo a* $\mathbb{R}$. Este isomorfismo, nos permite afirmar, que aunque el número real a y el número complejo $(a, 0)$ son de distinta naturaleza, se identifican en las operaciones de adición y multiplicación.

$$\begin{array}{ccccc} (a,0) & + & (b,0) & = & (a+b,0) \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ a & + & b & = & a+b \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} (a,0)\cdot(b,0) & & & & (a\cdot b,0) \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ a & \cdot & b & = & a\cdot b \end{array}$$

1. Calcula el producto $(12, 0)\cdot(14, 0)$ operando con el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales.

2. Haz lo mismo con la suma $(17, 0) + (13, 0)$.

2 La ecuación $x^2 = -1$

La ecuación $x^2 = -1$, que no tiene solución en el conjunto de los números reales, sí tiene solución en el conjunto de los números complejos. En efecto: los números complejos $(0, 1)$ y $(0, -1)$ son soluciones de dicha ecuación, puesto que

$$(0,1)^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (-1,0)$$
$$(0,-1)^2 = (0,-1)\cdot(0,-1) = (-1,0)$$

Y como se han identificado el conjunto $\mathbb{C}_0$ y el conjunto $\mathbb{R}$ resulta que el número complejo $(-1, 0)$ se identifica con el número real -1; por lo tanto, hay dos números complejos $(0, 1)$ y $(0, -1)$ cuyo cuadrado es -1. El número complejo $(0, 1)$ se representa por la letra i.

$$i = (0,1); \quad i^2 = -1$$

3. Halla:

$(0, 5)\cdot(1, 0)$

$(0, b)\cdot(1, 0)$

$(b, 0)\cdot(1, 0)$

3 Forma binómica de un número complejo

El número complejo (a, b) se puede escribir del modo siguiente:

$$(a,b) = (a,0) + (0,b) = (a,0) + (b,0)\cdot(0,1) = (a,0) + (b,0)\cdot i$$

y teniendo en cuenta la identificación de $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}_0$ se tiene:

$$(a,b) = a + bi$$

Esta forma de escribir el número complejo (a, b) se llama la *forma binómica.*

El número complejo (a, b) se dice que está escrito en forma *cartesiana* o en forma de par.

Ejemplo:

- El número complejo $(3, -1)$ escrito en forma binómica es $3 - i$, análogamente el número complejo $(-1, 0)$ se escribe $-1 + 0i$ es decir, -1.

  El número complejo $-5 + 2i$ se escribe en forma de par $(-5, 2)$.

4. Escribe en forma binómica los números complejos: $(3, -1)$, $(2, 0)$

5. Escribe en forma de pares los siguientes números complejos dados en forma binómica: $3 - 6i$, $3 - 4i$, $2i$, $1/2 + i$

6. Se da el número complejo $z = 2 - i$, halla pasando previamente a la forma de par, el opuesto de z.

7. Observa que $(2, 3)i = (2, 3)(0, 1) =$
$= (2\cdot 0 - 1\cdot 3, 2\cdot 1 + 3\cdot 0) = (-3, 2)$

Calcula:

$(-b, 0)i$; $(5, -1)i$; $(8\cdot 2)i$

4 Parte real y parte imaginaria de un número complejo

Sea $z = a + bi$, un número complejo escrito en forma binómica; se llama *parte real de z*, y se escribe $Re(z)$, al número real a, y *parte imaginaria de z*, y se escribe $Im(z)$, al número real b.

Observa que la parte real y la imaginaria de un número completo son siempre *números reales.*

Ejemplo:

- $z = 1 - i$, $\quad \mathrm{Re}(z) = 1, \quad \mathrm{Im}(z) = -1.$

  Análogamente si $\omega = -2i$

  $$\mathrm{Re}(\omega) = 0, \quad \mathrm{Im}(\omega) = -2$$

8. Halla las partes real e imaginaria de los siguientes números complejos:

$$z_1 = -1 + 2i, \quad z_2 = 3i,$$
$$z_3 = 1/2 - 1/3i, \quad z_4 = 6$$

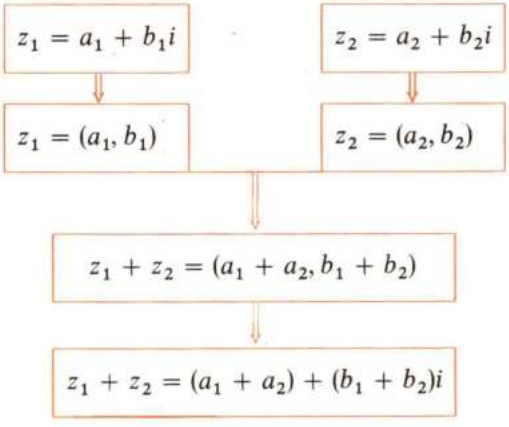
9. Un número complejo z es tal que:

$\mathrm{Re}(z) = 2\,\mathrm{Im}(z)$ y $\mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z) = 6$.

Halla dicho número complejo.

5 Adición de números complejos en forma binómica

Sean $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$ dos números complejos escritos en forma binómica. El siguiente esquema indica cómo se puede obtener la forma binómica del complejo $z_1 + z_2$



Se observa que $\begin{cases} \mathrm{Re}\,(z_1 + z_2) = a_1 + a_2 = \mathrm{Re}\,(z_1) + \mathrm{Re}\,(z_2) \\ \mathrm{Im}\,(z_1 + z_2) = b_1 + b_2 = \mathrm{Im}\,(z_1) + \mathrm{Im}\,(z_2) \end{cases}$

Ejemplo:

- Sea $z_1 = 6$ y $z_2 = -3 + 2i$, entonces

  $$z_1 + z_2 = (6 + (-3)) + (0 + 2)i = 3 + 2i.$$

10. Sean $z_1 = 6 - 6i$; $z_2 = 3 + 3i$, halla $z_1 + z_2$.

11. Se dan en forma de par, los complejos

$z_1 = (-1, 0)$; $\quad z_2 = (3, 0)$; $\quad z_3 = (0, 1)$

halla en forma binómica $z_1 + z_2 + z_3$ y comprueba que

$$\mathrm{Re}(z_1 + z_2 + z_3) = \mathrm{Re}(z_1 + z_2) + \mathrm{Re}(z_3) = \mathrm{Re}(z_1) + \mathrm{Re}(z_2) + \mathrm{Re}(z_3).$$

12. Halla la parte imaginaria de la suma de los números complejos del ejercicio anterior.

13. Comprueba que los números complejos $(-2, 3)$ y $(2, -3)$ son opuestos, y escribe ambos en forma binómica.

14. Considera el número complejo $z = (a, b)$. Calcula:

$\mathrm{Re}(z)$; $\mathrm{Im}(z)$; $-z$; $\mathrm{Re}(-z)$; $\mathrm{Im}(-z)$

y comprueba que

$\mathrm{Re}(-z) = -\mathrm{Re}(z)$; $\mathrm{Im}(-z) = -\mathrm{Im}(z)$.

6 Diferencia de números complejos en forma binómica

Dados dos números complejos

$$z_1 = a_1 + b_1 i, \quad z_2 = a_2 + b_2 i$$

se define:

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$$

Como el opuesto de z_2 es

$-z_2 = (-a_2, -b_2)$; $\quad -z_2 = -a_2 - b_2 i$

resulta:

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (a_1 + b_1 i) + (-a_2 - b_2 i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$$

Se observa que $\begin{cases} \operatorname{Re}(z_1 - z_2) = a_1 - a_2 = \operatorname{Re}(z_1) - \operatorname{Re}(z_2) \\ \operatorname{Im}(z_1 - z_2) = b_1 - b_2 = \operatorname{Im}(z_1) - \operatorname{Im}(z_2) \end{cases}$

Ejemplo:

- Sea $z_1 = 3 - 10i$, $\quad z_2 = 1 + i$, entonces

$$z_1 - z_2 = (3 - 1) + (-10 - 1)i = 2 - 11i$$

15. Se dan los números complejos

$$z_1 = (-1, 1), \quad z_2 = (0, 1), \quad z_3 = (1, 0),$$

halla pasando a la forma binómica

$$(z_1 - z_2) - z_3 \quad \text{y} \quad z_1 - (z_2 - z_3)$$

y comprueba que

$$(z_1 - z_2) - z_3 \neq z_1 - (z_2 - z_3),$$

es decir, la diferencia de números complejos no es asociativa.

16. Sea $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = -i$.

Halla $z_1 + z_2$, $\quad z_1 - z_2$.

17. Sean z_1, z_2 dos números complejos tales que $z_1 + z_2 = 6 + i$ y que verifican que $\operatorname{Im}(z_1) = \operatorname{Re}(z_2)$ y $\operatorname{Re}(z_1) = 2$, $\operatorname{Im}(z_2)$

Halla z_1 y z_2.

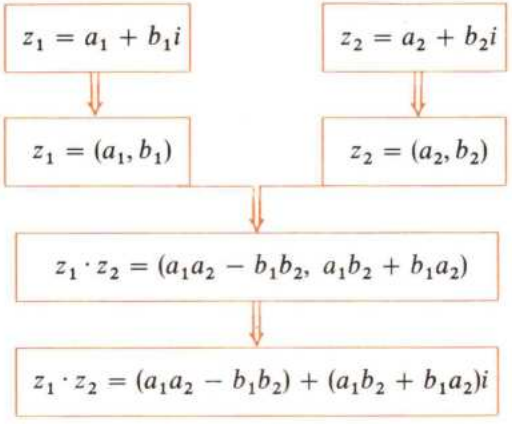
18. Sea z_1, z_2 y z_3 tres números complejos tales que $\operatorname{Re}(z_1) = 2\operatorname{Re}(z_2)$ y $\operatorname{Re}(z_3) = 3\operatorname{Re}(z_2)$.

¿Puede ser $z_1 + z_2 - z_3 = 1 + i$?

7 Multiplicación de números complejos en forma binómica

7.1. Sean los números complejos $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$.

El siguiente esquema indica cómo se obtiene la forma binómica del número complejo $z_1 \cdot z_2$



En la práctica, dos números complejos en forma binómica se multiplican como si fueran binomios de primer grado en i y recordando que $i^2 = -1$.

$$(a_1 + b_1 i)\cdot(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + \\ + b_1 a_2 i + b_1 b_2 i^2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$$

Ejemplos:

- $-i\cdot(5 - 3i) = 5\cdot i - 3ii = 5\cdot i - 3i^2 = 5i + 3 = 3 + 5i$
- $i\cdot(-i) = -i^2 = -(-1) = 1$
- Se consideran los números complejos $z_1 = (3, 2)$ y $z_2 = (-1, 5)$. Vamos a calcular $z_1\cdot z_2$, z_1^{-1} y z_2^{-1}.

  Se tiene: $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = -1 + 5i$,

  de donde
  $$z_1\cdot z_2 = 3(-1) - 2\cdot 5 + (3\cdot 5 + 2(-1))i = -13 + 13i$$

  o también
  $$z_1\cdot z_2 = -3 + 15i - 2i + 10i^2 = -3 - 10 + 15i - 2i = \\ = -13 + 13i$$

  Análogamente:
  $$z_1^{-1} = \frac{3}{3^2 + 2^2} - \frac{2}{3^2 + 2^2}\, i = \frac{3}{13} - \frac{2}{13}\, i$$
  $$z_2^{-1} = \frac{-1}{(-1)^2 + 5^2} - \frac{5}{(-1)^2 + 5^2}\, i = \frac{-1}{26} - \frac{5}{26}\, i$$

7.2. Si $z = a + bi$, es un número complejo y r un número real, sabemos que el isomorfismo de $\mathbb{R}$ con $\mathbb{C}_0$, permite identificar el número real r con el número complejo $(r, 0)$, es decir, con el número complejo en forma binómica $r + 0i$, entonces se puede definir el producto del número real r por el número complejo z como el producto

$$(r + 0i)\cdot z = (r + 0i)\cdot(a + bi) = ra + (rb)i$$

es decir, basta multiplicar cada componente por el número real. Se observa que:

$$\mathrm{Re}\,(rz) = r\,\mathrm{Re}\,(z)$$
$$(rz) = r\,\mathrm{Im}\,(z)$$

Ejemplos:

- $2\cdot(3 - i) = 6 - 2i$
- $3\cdot(i) = 3(0 + i) = 3\cdot 0 + 3\cdot i = 3i$

19. Sean los números complejos

$$z_1 = 1 + 2i, \quad z_2 = -3 + 2i$$

Calcula:

$$(z_1 z_2)^{-1}, \quad z_1^{-1}\cdot z_2^{-1}$$

20. Escribe en forma binómica los números complejos

$$z_1 = (0, 5) \quad \text{y} \quad z_2 = (1, -1)$$

y calcula las expresiones:

$$z_1^{-1} \quad ; \quad z_2^{-1} \quad ; \quad z_1^{-1} + z_2^{-1}$$

y comprueba que

$$(z_1 + z_2)^{-1} \neq z_1^{-1} + z_2^{-1}$$

21. Halla un número complejo z tal que

$$\mathrm{Re}(z) = 3 \quad \text{y} \quad z^{-1} = \frac{3}{10} + \frac{1}{10}\, i$$

22. ¿Existe algún número completo z tal que $z = z^{-1}$?

23. ¿Qué relación existe entre $\mathrm{Re}(z)$ y $\mathrm{Re}(z^{-1})$?

8 Conjugado de un número complejo

Dado el número complejo $z = a + bi$, se define el *conjugado de* z, y se escribe $\bar{z}$, como el número complejo que tiene la misma parte real que z y la parte imaginaria opuesta de la de z, es decir, $\text{Re}(\bar{z}) = \text{Re}(z)$; $\text{Im}(\bar{z}) = -\text{Im}(z)$. En forma binómica si $z = a + bi$, $\bar{z} = a - bi$.

Ejemplo:

- El conjugado de $2 - 3i$ es $2 + 3i$.

9 Propiedades del conjugado

9.1. *El conjugado de una suma, es la suma de los conjugados de los sumandos.*

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

En efecto, sea $z_1 = a_1 + b_1 i$ y $z_2 = a_2 + b_2 i$

$$\bar{z}_1 = a_1 - b_1 i; \quad \bar{z}_2 = a_2 - b_2 i$$

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

de donde

$$\overline{z_1 + z_2} = (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2)i = (a_1 - b_1 i) + (a_2 - b_2 i) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

9.2. *El conjugado de un producto es el producto de los conjugados.*

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

Sea $z_1 = a_1 + b_1 i$ y $z_2 = a_2 + b_2 i$,

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i$$

de donde

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = (a_1 a_2 - b_1 b_2) - (a_1 b_2 + b_1 a_2)i = (a_1 - b_1 i) \cdot (a_2 - b_2 i) = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

9.3. *El conjugado del conjugado de* z *es* z, es decir, $\bar{\bar{z}} = z$

$$z = a + bi; \quad \bar{z} = a - bi \quad \text{y} \quad \bar{\bar{z}} = a + bi$$

24. Sean los números complejos

$$\alpha = 5 - 3i \quad \text{y} \quad \beta = -4 + 8i$$

Calcula:

$$\bar{\alpha}; \bar{\beta}; \bar{\alpha} + \bar{\beta}; \alpha + \beta; \overline{\alpha + \beta}$$

y comprueba que $\overline{\alpha + \beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}$

25. Comprueba con los complejos del ejercicio **26** que

$$\overline{\alpha \cdot \beta} = \bar{\alpha} \cdot \bar{\beta}$$

26. Comprueba con los complejos del ejercicio **26** que

$$\bar{\bar{\alpha}} = \alpha \quad \text{y} \quad \bar{\bar{\beta}} = \beta$$

10 Cocientes de números complejos en forma binómica

10.1. Considérese los números complejos

$$\alpha = 2 + 3i; \quad \beta = 3 - 4i$$

Vamos a calcular el cociente $\frac{\alpha}{\beta}$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \alpha \cdot \beta^{-1}$$

$$\beta^{-1} = (3 - 4i)^{-1} = \frac{3}{3^2 + 4^2} + \frac{4}{3^2 + 4^2}\, i = \frac{3}{25} + \frac{4}{25}\, i$$

luego $\frac{\alpha}{\beta} = \alpha \cdot \beta^{-1} = (2 + 3i) \cdot \left(\frac{3}{25} + \frac{4}{25}\, i\right) =$

$$= \frac{6 - 12}{25} + \frac{8 + 9}{25}\, i = \frac{-6}{25} + \frac{17}{25}\, i = \frac{1}{25} \cdot (-6 + 17i)$$

Se observa que

$$\begin{cases} \beta \cdot \bar{\beta} = (3 - 4i) \cdot (3 + 4i) = 3^2 + 4^2 = 25 \\ \alpha \cdot \bar{\beta} = (2 + 3i) \cdot (3 + 4i) = (6 - 12) + (8 + 9)i = -6 + 17i. \end{cases}$$

Por lo tanto

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{25} \cdot (-6 + 17i) = \frac{1}{\beta \cdot \bar{\beta}} \cdot \alpha \cdot \bar{\beta} = \frac{\alpha \cdot \bar{\beta}}{\beta \cdot \bar{\beta}}$$

Con este ejercicio, se justifica la siguiente regla:

Para dividir dos complejos se multiplica el dividendo y el divisor por el conjugado del divisor.

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha \cdot \bar{\beta}}{\beta \cdot \bar{\beta}}$$

Ejemplos:

- $\frac{3 + i}{2 - i} = \frac{(3 + i) \cdot (2 + i)}{(2 - i) \cdot (2 + i)} = \frac{6 - 1}{4 + 1} + \frac{3 + 2}{4 + 1} = \frac{5 + 5i}{5} = 1 + i$
- $\frac{1}{1 + i} = \frac{1 \cdot (1 - i)}{(1 + i) \cdot (1 - i)} = \frac{1 - i}{1 + 1} = \frac{1 - i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\, i$

10.2. Esta regla se puede justificar también teóricamente del siguiente modo: $\alpha/\beta = \alpha \cdot \beta^{-1}$

Sea $\alpha = a + bi$ y $\beta = c + di$

Como

$$\beta^{-1} = \frac{c}{c^2 + d^2} - \frac{d}{c^2 + d^2}\, i$$

27. Calcula:

a) $\frac{1 + i}{1 - i}$ b) $\frac{2 - i}{2 + i}$ c) $\frac{1}{1 + i}$

d) $\frac{3 + 4i}{5 + i}$ e) $\frac{3i}{2 + i}$ f) $\frac{4}{5 + i}$

28. Halla un nuevo complejo z tal que

$$\frac{z}{2 - i} = 3 + 2i$$

29. Demuestra que si z_1 y z_2 son complejos tales que $z_1 \cdot z_2 = 0$, y si $z_1 \neq 0$ entonces $z_2 = 0$.

Recuerda que por ser $\mathbb{C}$ un cuerpo y ser $z_1 \neq 0$, existe z_1^{-1}.

30. Calcula $\frac{z_1}{z_2}$ siendo $\begin{cases} z_1 = 3 + 2i \\ z_2 = -3 + 4i \end{cases}$

resulta:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \alpha \cdot \beta^{-1} = (a + bi) \cdot \left(\frac{c}{c^2 + d^2} - \frac{d}{c^2 + d^2} i \right) =$$

$$= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{-ad + bc}{c^2 + d^2} i = \frac{1}{c^2 + d^2} [(ac + bd) + (-ad + bc)i]$$

Como

$$\beta \cdot \bar{\beta} = (c + di) \cdot (c - di) = c^2 + d^2$$
$$\alpha \cdot \bar{\beta} = (a + bi) \cdot (c - di) = (ac + bd) + (-ad + bc)i$$

se tiene:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{c^2 + d^2} [(ac + bd) + (-ad + bc)i] = \frac{1}{\beta \cdot \bar{\beta}} \alpha \cdot \bar{\beta} = \frac{\alpha \cdot \bar{\beta}}{\beta \cdot \bar{\beta}}$$

31. Demuestra que si $z = a + bi$, es un número complejo arbitrario, entonces z/i es el complejo $b - ai$.

32. Calcula $2 \cdot (3 - i) + 2(6 + i) - 3i$.

33. Calcula la expresión:

$$\frac{5 \cdot (3 - 2i) + 4 \cdot (2 - i)}{6i + 2 \cdot (1 - i)}$$

34. ¿Qué relación existe entre z^{-1} y $(rz)^{-1}$ donde r es un número real?

11 Potencias de números complejos

11.1. La potencia de un número complejo se define del mismo modo que la potencia de un número real; las propiedades de la potencias siguen siendo válidas en este caso, ya que todas ellas son consecuencia de la estructura de cuerpo. Vamos a calcular las potencias sucesivas del complejo i. Se tiene: $i^2 = -1$, $i^3 = i^2 i = -1i = -i$; $i^4 = i^3 i = -ii = 1$

Sea n un número natural arbitrario, entonces dividiendo n por 4, se tiene $n = 4c + r$ con $0 \leqslant r < 4$ de donde:

$$i^n = i^{4c+r} = i^{4c} \cdot i^r = (i^4)^c \cdot i^r = i^r, \quad \text{ya que} \quad i^4 = 1$$

Luego $i^n = i^r$ siendo r el resto de la división de n por 4.

Ejemplo:

- Calculemos i^{38} se tiene $38 = 9 \cdot 4 + 2$ luego en este caso

$$r = 2, \; i^{38} = i^2 = -1$$

11.2. Consideremos un complejo arbitrario $z = a + bi$, si n es un número natural se tiene por la fórmula del binomio de Newton

$$z^n = (a + bi)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}(bi) + \binom{n}{2} a^{n-2}(bi)^2 + \\ + \cdots + \binom{n}{n} (bi)^n$$

que nos da la potencia de cualquier complejo.

Si n es natural, se define $z^{-n} = \frac{1}{z^n}$

35. Calcula: i^{16}, i^{3225}, i^{123}.

36. Calcula $-(1 + i)^2$ y $(1 + i)^3$.
Calcula $(1 - i)^8$, $(2 + i)^{-4}$.
Halla el valor de la expresión:

$$\frac{i + (2 - i)^4}{3 + i^{-6}}$$

Ejemplos:

- Sea $z = 3 - i$, entonces

$$z^5 = (3 + i)^5 = \binom{5}{0}3^5 + \binom{5}{1}3^4(-i) + \binom{5}{2}3^3 \cdot (-i)^2 +$$

$$+ \binom{5}{3}3^2(-i)^3 + \binom{5}{4}3(-i)^4 + \binom{5}{5}(-i)^5 =$$

$$= 243 + 5 \cdot 81 \cdot (-i) + 10 \cdot 27 \cdot (-i)^2 + 10 \cdot 9 \cdot (-i)^3 +$$

$$+ 5 \cdot 3(-i)^4 + 1 \cdot (-i)^5 = 243 - 405i - 270 + 90i +$$

$$+ 15 + i = -12 - 316i$$

37. Calcula:

a) z_1^6, siendo $z_1 = (2 + i)$

b) z_2^7, siendo $z_2 = (1 - i)$

c) z_3^4, siendo $z_3 = (2 - 4i)$

12 Raíz cuadrada de un número complejo

12.1. Sea $z = a + bi$ un número complejo, vamos a tratar de hallar sus raíces cuadradas. Sea una raíz cuadrada de z el número complejo $\omega = x + iy$, entonces $\omega^2 = z$ es decir,

$$z = a + bi = (x + iy)^2 = (x + iy) \cdot (x + iy) = (x^2 - y^2) + 2xy\,i$$

de donde se tiene el sistema: $\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$

cuya solución da las raíces de z.

Obsérvese que dado que $x = \mathrm{Re}\,(\omega)$ e $y = \mathrm{Im}\,(\omega)$, x e y son números reales.

Ejemplo:

- Vamos a hallar las raíces cuadradas de i, en este caso resultaría el sistema

$$\left.\begin{matrix} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} (x - y)(x + y) = 0 \\ xy = \frac{1}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$x - y = 0 \quad \text{o} \quad x + y = 0$$

la segunda posibilidad no se puede dar, pues, si $x = -y$, entonces $xy = -x^2 = \frac{1}{2}$ y como x^2 es positivo, $-x^2$ sería negativo y, por tanto, no puede ser $-x^2 = \frac{1}{2}$; entonces debe tenerse en el sistema $x = y$, de donde

$$xy = x^2 = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{o} \quad x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

las raíces son $\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,i$, $\omega_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,i$

12.2. Ya se comprobó que los números complejos i y $-i$ eran soluciones de la ecuación $x^2 = -1$. Probemos ahora de otro modo que las raíces cuadradas de -1 son i y $-i$.
Sea $a + bi$ una raíz cuadrada de -1, entonces

$$\sqrt{-1 + 0i} = a + bi \Leftrightarrow -1 + 0i = (a + bi)^2 = (a^2 - b^2) + 2ab\,i$$

de aquí resulta el sistema $\begin{cases} a^2 - b^2 = -1 \\ 2\ \ ab = 0 \end{cases}$

en el que a y b son números reales. De $a \cdot b = 0$ se deduce que o bien $b = 0$ o bien $a = 0$. Si $b = 0$, de la primera ecuación resulta: $a^2 = -1$, lo cual es imposible, ya que por ser a un número real, su cuadrado es positivo; por tanto, debe ser $a = 0$ y $b = 1$, o $b = -1$, luego las raíces cuadradas de i son

$$a + bi \begin{cases} 0 + 1i = i, & \omega_1 = i \\ 0 - 1i = -1, & \omega_2 = -i \end{cases}$$

Consecuencia del ejemplo anterior es que *la raíz de un número real negativo es igual al producto de la raíz cuadrada de su valor absoluto por i.*

12.3. Ahora podemos resolver ecuaciones de 2.º grado cuyo discriminante sea negativo: $b^2 - 4ac < 0$.

Sea la ecuación $x^2 - 4x + 13 = 0$; se obtiene:

$$x = 2 \pm \sqrt{4 - 13} = 2 \pm \sqrt{-9} = 2 \pm \sqrt{9} \cdot i = 2 \pm 3i$$

$$\text{Las soluciones son } \begin{cases} x_1 = 2 + 3i \\ x_2 = 2 - 3i \end{cases}$$

que son dos números complejos conjugados.

12.4. Vamos a hallar las raíces cuadradas de $z = 2 + \sqrt{32} \cdot i$.
Sea $x + yi$ una de las raíces

$$\sqrt{2 + \sqrt{32} \cdot i} = x + yi \Rightarrow 2 + \sqrt{32} \cdot i = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$

$$\text{El sistema es: } \begin{cases} x^2 - y^2 = 2 \\ 2xy = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = 2 \\ xy = 2\sqrt{2} \end{cases} \quad [1]$$

Despejamos x en la 2.ª ecuación de [1] y sustituimos este valor en la 1.ª

$$x = \frac{2\sqrt{2}}{y}; \quad \frac{8}{y^2} - y^2 = 2; \quad 8 - y^4 = 2y^2; \quad y^4 + 2y^2 - 8 = 0$$

Haciendo $y^2 = u$ resulta la ecuación $u^2 + 2u - 8 = 0$, cuyas soluciones son $u_1 = 2$; $u_2 = -4$, luego las raíces cuadradas de z son: $\omega_1 = 2 + \sqrt{2} \cdot i$; $\omega_2 = 2 - 2\sqrt{2} \cdot i$

38. Observa que:

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4}\sqrt{-1} = \sqrt{4}i = \pm 2i$$
$$\sqrt{-9} = \sqrt{9}\sqrt{-1} = \sqrt{9}i = \pm 3i$$

y calcula:

$$\sqrt{-36}, \quad \sqrt{-25}, \quad \sqrt{-16}$$

39. Resuelve las ecuaciones

a) $x^2 - 10x + 29 = 0$

b) $x^2 - 14x + 50 = 0$

c) $x^2 - 2x + 2 = 0$

40. Halla las raíces cuadradas de los siguientes complejos:

$$4, \quad -16, \quad -9i, \quad -1 + 2\sqrt{6} \cdot i$$

Ejercicios y cuestiones

41. Hallar un número complejo tal que su cuadrado sea $1 + i$.

42. Resolver las ecuaciones:

$$x^2 - 6x + 34 = 0; \quad x^2 - 8x + 20 = 0; \quad 36x^2 - 24x + 13 = 0;$$
$$4x^2 + 4x + 5 = 0; \quad x^2 - 4x + 5 = 0; \quad x^2 - 2x + 17 = 0$$

43. Halla el número complejo dado por $(i^5 + i^8)^3$. Razona los pasos.

44. Calcula $(3 - 4i)^5$ aplicando la fórmula del Binomio de Newton.

45. ¿Qué condición han de cumplir los coeficientes de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, para que sus raíces sean complejas?

46. ¿Es falsa o verdadera la relación $i^5 = i$? ¿Por qué?

47. Calcula a) i^{17}; b) i^{240}; c) $i^{5.343}$.

48. Halla las raíces cuadradas de $5 + 12i$.

49. En la potencia $(1 + i)^{20}$, calcula 1.º el término medio; 2.º, el término 15.º

50. Halla las raíces reales y complejas de $x^4 - 16 = 0$.

51. ¿Para qué valores de x e y se verifica la relación $(6x + 5yi)(x - yi) = 29 - 2i$?

52. Resuelve la ecuación: $\dfrac{x + i}{x - i} = \dfrac{3(x - i)}{x + i}$.

53. Halla la ecuación de segundo grado cuyas raíces sean $3 + 2i$ y $3 - 2i$.

54. Mediante la identificación de $\mathbb{R}$ con los números complejos de la forma $(a, 0)$, escribe las siguientes expresiones en forma binómica

$$(-6, 0) + (2, 0)(0, 1); \quad (3, 0) + (4, 0)(0, 1)$$

55. Calcula el opuesto y el inverso del número complejo $(2, 1)$ y escríbelos en forma binómica.

56. Halla los conjugados de los números complejos

$$\alpha_1 = 12 + 3i \qquad \alpha_2 = -1 + i$$
$$\beta_1 = 6 - 2i \qquad \beta_2 = -2 + i$$
$$\gamma = -2 - 3i \qquad \gamma_2 = 3 - i$$
$$\delta = -2 + 4i \qquad \delta_2 = 1 - i$$

y calcula:

a) $\alpha_1 + \beta_1$; b) $\alpha_1 + \bar{\beta}_1$; c) $\alpha_1 \cdot \beta_1$; d) $\bar{\alpha}_1 \cdot \bar{\beta}_1$
e) $-(-\alpha_2)$; f) $\alpha_1 - 2\alpha_2$; g) $2\alpha_1 - \alpha_2$;
h) $\alpha_2 + \beta_2 - 2\gamma_2 - \delta_2$; i) $-\alpha_2 - \beta_2 - \gamma_2 - \delta_2$

57. Halla los siguientes cocientes entre números complejos:

$$\frac{12 + 3i}{6 - 2i}; \quad \frac{-2 - 3i}{-4 + 4i}; \quad \frac{6 - 2i}{5 - 3i}; \quad \frac{4 + 2i}{-5 - 2i}$$

58. ¿Es lo mismo el opuesto del inverso de un número complejo $z = a + bi$ que el inverso del opuesto de z? Razona la respuesta.

59. ¿Puede ser el producto de dos números complejos un número real? Justifica la respuesta.

Tema 24

REPRESENTACION GEOMETRICA DE LOS NUMEROS COMPLEJOS

En este tema se dan dos representaciones de los números complejos. A cada número complejo se le asocia un punto del plano que es su afijo.

El origen de coordenadas y el afijo de cada número complejo determinan un vector que biunívocamente queda asociado a ese número complejo.

Se inicia el tema con una definición analítica de módulo para dar posteriormente su interpretación geométrica.

Finalmente se da una interpretación geométrica de la suma de números complejos y del producto de un número complejo por i.

1 Módulo de un número complejo

Definición:

Se llama módulo del número complejo $z = a + bi$, y se representa por $|z|$, a la raíz cuadrada positiva de $z \cdot \bar{z}$.

Dado que $z \cdot \bar{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2$, se sigue que $|z|$ es siempre un número real positivo

$$|z| = +\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$$

Ejemplo:

$z = 3 - 2i$; el conjugado de z es $\bar{z} = 3 + 2i$
$z \cdot \bar{z} = (3 - 2i) \cdot (3 + 2i) = 9 + 4 = 13$,
luego el módulo de z es $|z| = \sqrt{13}$.

1. Halla $|\bar{z}|$ siendo $z = 6 - i$.
2. Halla $|i|$.
3. Sea z un complejo tal que $|z| = 0$, ¿cuál es este número complejo z?
4. Un complejo $z = a + bi$ es tal que su parte real y su parte imaginaria son números enteros y se sabe que $|z| = 1$. Halla los *posibles complejos* z.
5. Sea $z_1 = 3 - i$, $z_2 = 6 + 4i$. Calcula $|z_1 + z_2|$ y compáralo con $|z_1| + |z_2|$.
6. Dado el número complejo $z = 2 + 3i$, calcula $|z|$ y $|\bar{z}|$. ¿Son iguales $|z|$ y $|\bar{z}|$?

2 Propiedades del módulo de un número complejo

$$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0 \quad [1]$$
$$|-z| = |z| \quad [2]$$
$$|\bar{z}| = |z| \quad [3]$$
$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \quad [4]$$

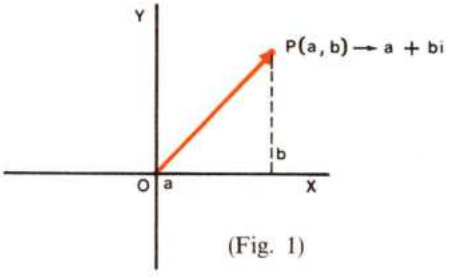
Las propiedades [1], [2] y [3] son inmediatas y se dejan como ejercicio. Vamos a demostrar la [4].

$$|z_1 \cdot z_2| = \sqrt{(z_1 \cdot z_2) \cdot (\overline{z_1 \cdot z_2})} = \sqrt{z_1 \cdot z_2 \cdot \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2} =$$
$$= \sqrt{z_1 \bar{z}_1 z_2 \bar{z}_2} = \sqrt{z_1 \bar{z}_1} \cdot \sqrt{z_2 \bar{z}_2} = |z_1| \cdot |z_2|$$

7. Demuestra las propiedades [1], [2] y [3] del módulo.

3 Representación geométrica de un número complejo

3.1. Consideremos dos ejes OX y OY en el plano, entonces podemos asociar a cada número complejo $z = a + bi$ el punto de coordenadas (a, b); y, recíprocamente, a cada punto P de coordenadas (a, b) se le puede asociar el número complejo $a + bi$; se tiene entonces una aplicación biyectiva entre puntos del plano y números complejos. El punto P se llama el afijo del número complejo $a + bi$.



(Fig. 1)

Los puntos situados sobre el eje OX son de la forma $(x, 0)$, es decir, corresponden a números complejos de la forma $x + 0i = x$, esto es, a números reales; por ello, el eje OX se suele llamar *eje real.*

Los puntos situados sobre el eje OY son de la forma $(0, y)$, y corresponden a números complejos de la forma $0 + yi = yi$, o sea, a números complejos cuya parte real es cero; estos números complejos se llaman *imaginarios*, y el eje OY se suele llamar *eje imaginario.*

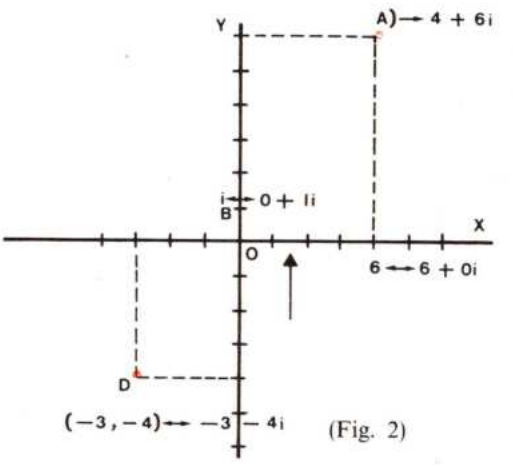
3.2. Consideremos ahora *un sistema de ejes* OX y OY en el plano, y sea $z = a + bi$ un número complejo; hemos visto que asociado a z hay un punto P de coordenadas (a, b), este punto determina, como se ve en la figura, un segmento orientado con origen O y extremo P, dicho segmento orientado se dice que es el *vector asociado al número complejo* z. Como el punto O está fijado de antemano, el vector queda determinado de forma única por su longitud r, que se llama el *módulo del vector*, y por el ángulo α, *que con la recta* OP forma la parte positiva del eje OX; a este ángulo se le llama el *argumento del número complejo* z, y lo escribimos Arg (z).

Aplicando al triángulo rectángulo $OP'P$ (figura 3) el teorema de Pitágoras, se tiene

$$r = +\sqrt{a^2 + b^2} = |z|,$$

es decir, que *el módulo de un número complejo es igual al módulo del vector asociado.*

eje imaginario



(Fig. 2)

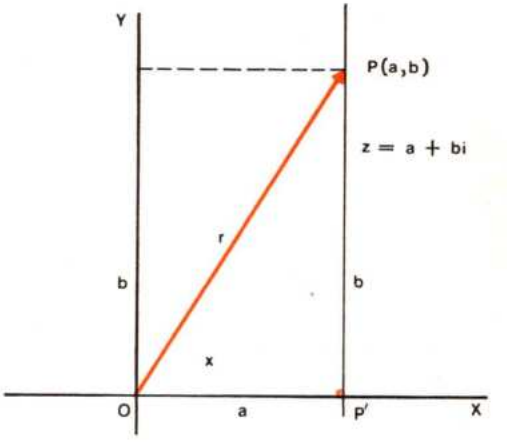
En la figura se han representado varios números complejos:

El punto A es el afijo de $4 + 6i$.
El punto B es el afijo de i.
El punto D es el afijo de $-3 - 4i$.

8. Representa los números complejos:

$$z_1 = -3 + 2i, \quad z_2 = \frac{1}{2}i, \quad z_3 = -i, \quad z_4 = 7$$

y di cuáles de ellos son imaginarios.



(Fig. 3)

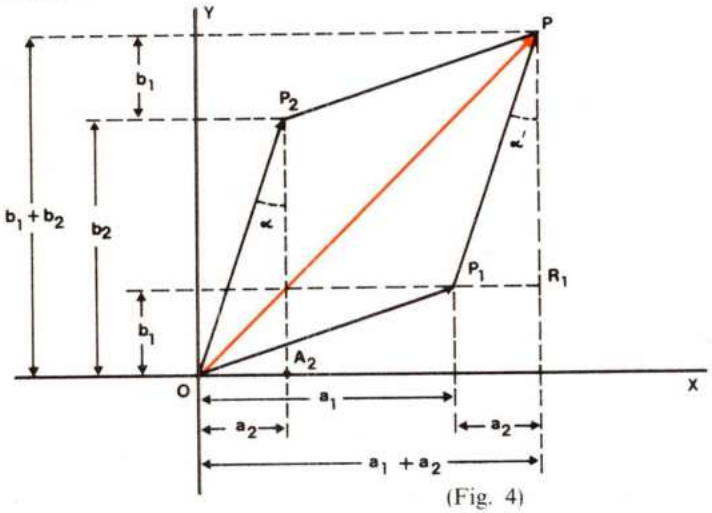
4 Interpretación geométrica de la suma de números complejos

Consideremos los números complejos

$$z_1 = a_1 + b_1 i \quad \text{y} \quad z_2 = a_2 + b_2 i,$$

se sabe que $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$

Representemos los vectores asociados a z_1 y z_2



(Fig. 4)

En la figura, se ve que $P_1PR_1 = OP_2A_2$, por ser triángulos rectángulos que tienen los dos catetos respectivamente iguales, es decir: $P_1R_1 = OA_2 = a_2$ y $R_1P = A_2P_2 = b_2$,

entonces, $\alpha = \alpha'$, luego, $OP_2 // P_1P$; análogamente $OP_1 // P_2P$, de aquí que OP_2PP_1 es un paralelogramo; además por construcción (figura 4) P tiene de coordenadas $(a_1 + a_2, b_1 + b_2)$ de forma que corresponde al número complejo

$$(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i = z_1 + z_2,$$

se tiene entonces que el vector asociado a $z_1 + z_2$ es la diagonal del paralelogramo que tiene por lados los vectores asociados a z_1 y z_2.

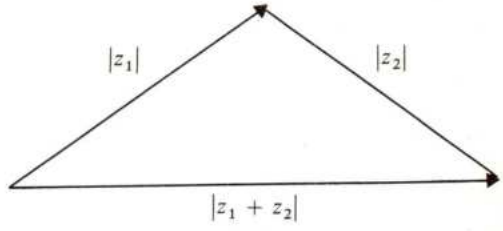
De la figura se obtienen las siguientes propiedades:

$$\text{Arg}\,(z_1 + z_2) \leqslant \max\,(\text{Arg}\,(z_1), \text{Arg}\,(z_2)) \quad [1]$$
$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2| \quad [2]$$

ya que un lado de un triángulo es menor que la suma de los otros dos (figura 5). Esta propiedad se conoce como la *desigualdad triangular de la suma*. Por otra parte

$|z_1| = |(z_1 - z_2) + z_2| \leqslant |z_1 - z_2| + |z_2|$; luego

$$|z_1 - z_2| \geqslant |z_1| - |z_2| \quad [3]$$



(Fig. 5)

5 Interpretación geométrica del producto por i

Sea $z = a + bi$, entonces $iz = i(a + bi) = -b + ai$, se sigue entonces que $|z| = |iz| = \sqrt{a^2 + b^2}$, es decir, los complejos z e iz tienen el mismo módulo.
Representemos gráficamente ambos complejos (figura 6).

Los triángulos OAP y OBQ son iguales por ser rectángulos y tener los dos catetos respectivamente iguales $OA = BQ$ y $AP = OB$;luego

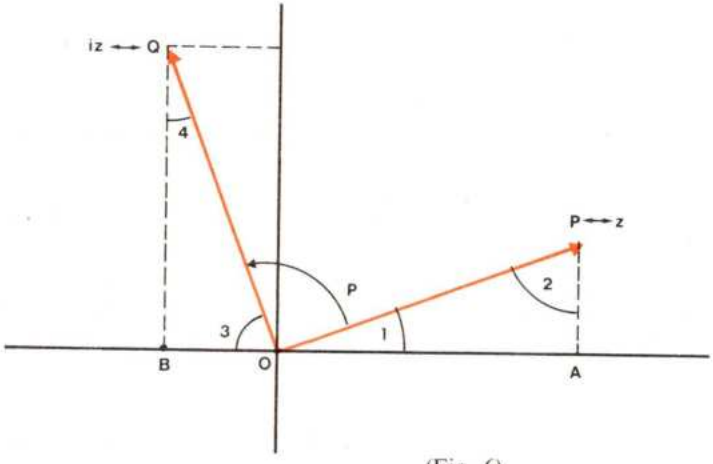
$$\widehat{OPA} = \widehat{QOB} \text{ y } \widehat{POA} = \widehat{OQB}$$

de donde, como $\varphi + \widehat{POA} + \widehat{QOB} = 180°$

se tiene:

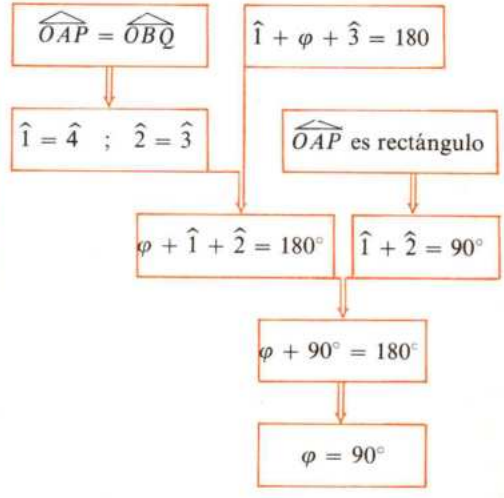
$$\varphi + \widehat{POA} + \widehat{OPA} = 180° \Rightarrow \varphi + 90° = 180° \Leftrightarrow \alpha = 90°;$$

es decir: *multiplicar por i un complejo equivale a girar 90°el vector asociado.*



(Fig. 6)

P es el afijo de $z = a + bi$ Q es el afijo de $iz = -b + ai$



Ejercicios y cuestiones

9. Sea z un número complejo imaginario. ¿Es su inverso imaginario? Pon un ejemplo.

10. Representa gráficamente $-z$ y $\bar{z}$ siendo $z = a + bi$ un número complejo arbitrario. ¿Qué relación existe entre Arg (z) y Arg $(-z)$? ¿Y entre Arg (z) y Arg $(\bar{z})$?

11. ¿Qué relación existe entre z y z^{-1}?

12. ¿Qué condición tienen que cumplir los argumentos de dos números complejos para que éstos sean iguales? y ¿para que sean opuestos? Justifícalo.

13. Demuestra que si el cociente de dos números complejos $\dfrac{a+b}{c+di}$ es un número complejo imaginario, se verifica: $ac + bd = 0$.

14 Dado el cociente de números complejos $\dfrac{3-2xi}{4-3i}$, determina x *para que:*

1.º Sea un número complejo imaginario.
2.º Sea un número real.
3.º Tenga un afijo en la primera bisectriz.

15 Calcula b en $\dfrac{b+i}{2+i}$, sabiendo que $\dfrac{b+i}{2+i} : \dfrac{2+3i}{1+i} = \dfrac{4+6i}{1+8i}$

16. Hallar dos números complejos tales que su suma sea $1 + 2i$, el cociente de ambos sea imaginario y la parte real del primero sea igual a 2.

17. Hallar un número complejo tal que, al sumarlo con su recíproco, dé como resultado la unidad imaginaria.

18. Se tienen dos números complejos, cuya suma es $3 + 2i$, sabiendo que la parte real de uno de ellos es 2 y su cociente es imaginario, hallar dichos números.

19. El cociente de dividir un complejo por su conjugado ¿puede ser real? Justifica tu respuesta.

20. ¿Qué propiedad tiene el producto de dos números imaginarios conjugados? ¿Por qué?

21. Si el producto de dos complejos no reales es real, ¿qué posición especial ocupan sus afijos? Justifica la respuesta.

22. ¿Qué clase de número es la suma de dos números complejos conjugados? ¿Y su diferencia? Justifica la respuesta.

23. Considera los números complejos $z_1 = 3 + 4i$ y $z_2 = 5 - 12i$.
Calcula: $|z_1|$; $|z_2|$; $|z_1| \cdot |z_2|$; $|z_1 \cdot z_2|$ y comprueba que

a) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

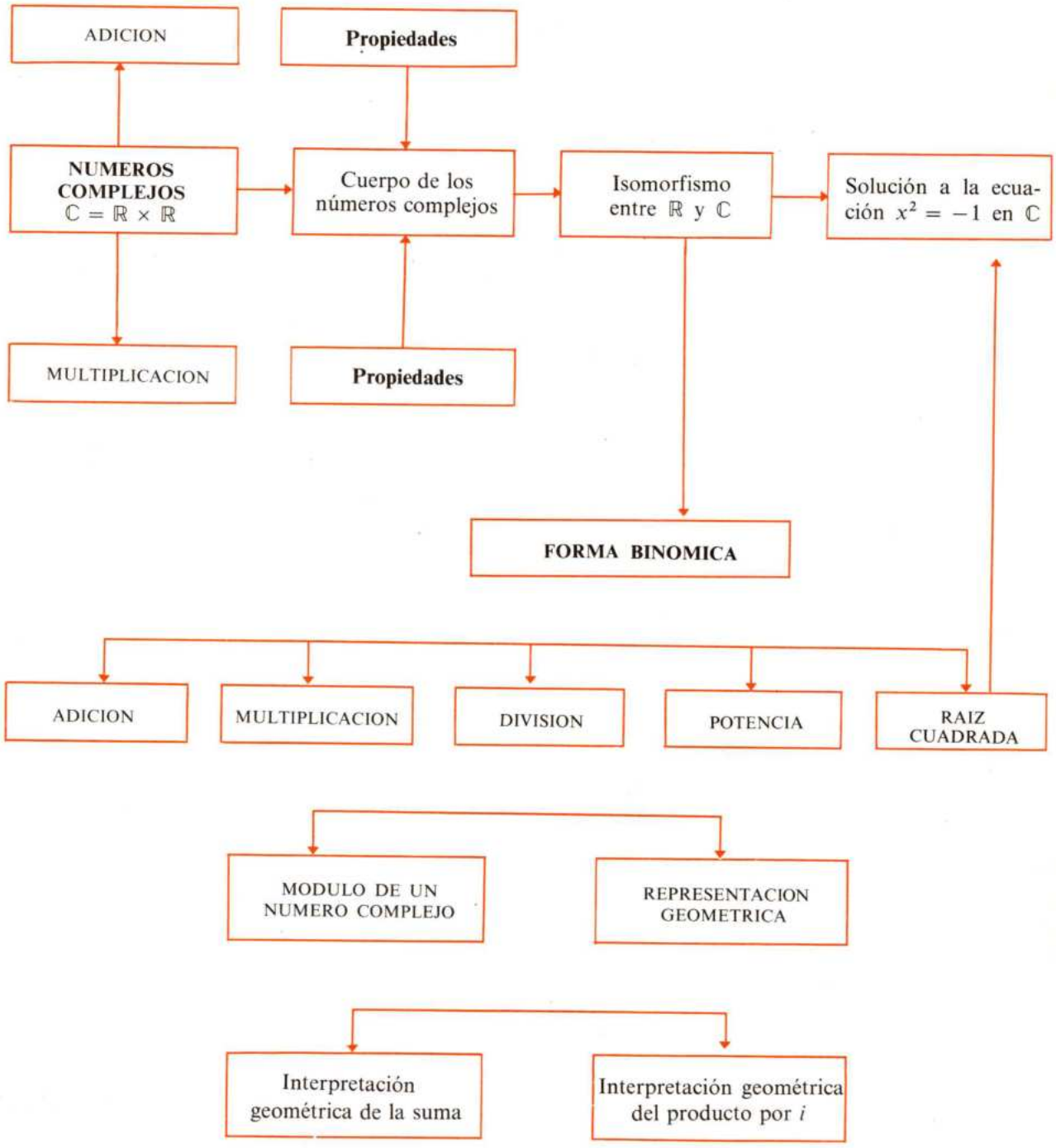
b) $z_1 + z_2 = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

c) $z_1 = z_1$

d) $|z_1| = |\bar{z}_1| = |-z_1|$.

DIAGRAMA ESTRUCTURAL DE LA UNIDAD

NUMEROS COMPLEJOS



Complementos y ampliación

1. ¿Cuántos números hay de tres cifras diferentes? ¿Cuál es la suma de ellos?

Dos números de tres cifras distintas difieren o bien en el orden de colocación o bien porque contienen cifras diferentes; se trata, pues, de un problema de variaciones.

Calculemos primero V_{10}^3

$$V_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$$

De estos 720 números hay que excluir los que tienen el cero como cifra en las centenas, ya que estos números no son de dos cifras; de estos hay $\frac{720}{10} = 72$

También se llega al mismo resultado pensando que hay dos lugares en los que tenemos que colocar 9 cifras: $0\_\_$ será $V_9^2 = 9 \times 8 = 72$.

Hay $720 - 72 = 648$ números de tres cifras distintas.

Como hay 72 números que acaban en 0, otros 72 que acaban en 1, otros 72 que acaban en 2, etc., resulta que la suma de las cifras de las unidades es

$$72 \cdot 0 + 72 \cdot 1 + 72 \cdot 2 + 72 \cdot 3 + \cdots + 72 \cdot 9 = 72 \cdot (0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + 9) = 72 \cdot 45 = 3.240$$

Lo mismo ocurre con la cifra de las decenas y centenas.

La suma de las decenas será: $72 \cdot 45 \cdot 10 = 32.400$

La suma de las centenas será: $72 \cdot 45 \cdot 100 = 324.000$

luego la suma total es: $324.000 + 32.400 + 3.240 = 359.640$

Suma de los que comienzan por 0

Eran 72. Sólo hay nueve cifras distintas en las unidades, puesto que el 0 está en las centenas $72 : 9 = 8$.

Hay, pues, ocho números que terminan en 1, ocho números que terminan en 2, etc...

Suma de unidades $8 \cdot (1 + 2 + \cdots + 9) = 8 \cdot 45 = 360$ unidades.

Suma de decenas 360 decenas = 3.600 unidades.

Suma de centenas: 0.

La suma de los números que comienzan por 0 es: $0 + 3.600 + 360 = 3.960$.

La suma pedida será: $359.640 - 3.960 = 355.680$.

2. ¿Cuántos números de cuatro cifras diferentes hay en el sistema decimal? Halla su suma.

Complementos (unidad 3)

1. Sean a y b dos números reales estrictamente positivos. Demuestra la siguiente relación: $a < b \Leftrightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$. Pon ejemplos.

2. Dadas las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{b}$, demuestra que se verifica la siguiente relación:

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{2b} < \frac{c}{b}$$

Es decir, dados dos números racionales, siempre existe otro entre ambos.

Esta propiedad se verifica también en el conjunto de los números reales.

3. Dados los segmentos $[3, 7]$ y $]4, 9]$.

Se pide:

a) su representación gráfica en $\mathbb{R}$
b) su intersección, es decir, los puntos comunes a ambos intervalos
c) un número radical que pertenezca a la intersección

Complementos y ampliación (unidad 4)

1 Principio de inducción completa: binomio de Newton

1.1. Consideremos la suma de los primeros números impares:

$$1 = 1 = 1^2 \; ; \; 1 + 3 = 4 = 2^2 \; ; \; 1 + 3 + 5 = 9 = 3^2 \; ; \; 1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$$

Observamos en los resultados cierta regularidad que podemos resumir en la expresión:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2 \quad (*)$$

Esta expresión es cierta para $n = 1, 2, 3, 4$, según se ha comprobado al principio; pero esto no es suficiente para concluir que la fórmula (*) se verifica para cualquier número natural.

Para probar que una propiedad se verifica para cualquier número natural se utiliza el llamado *principio de inducción completa*, que admitiremos como axioma y que se enuncia en la siguiente forma:

Si una proposición es cierta para $n = 1$, y del supuesto de que sea cierta para $n = k$, se deduce que lo es para $n = k + 1$; la proposición se verifica para cualquier número natural n.

1.2. Demostremos que la fórmula $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$ es cierta para cualquier valor de n desde 1 en adelante.

Es cierta para $n = 1$, ya que $1 = 1^2$.

Supongamos que es cierta para $n = k$: $1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2$.

Para deducir que la expresión es cierta para $n = k + 1$, sumamos a los dos miembros $2(k + 1) - 1$ con lo que resulta:

$$(1+3+5+\cdots+(2k-1)+2(k+1)-1=k^2+2(k+1)-1=k^2+2k+1=(k+1)^2$$

lo que nos indica que la expresión también es cierta para $n = k + 1$.

Por el principio de inducción completa la expresión dada es cierta para todo valor de n.

2. Demuestra por inducción que: $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

3. Demostremos ahora la fórmula del binomio de Newton aplicando el principio de inducción.

Las primeras potencias de $(x + 1)$ se pueden escribir con ayuda de los números combinatorios del modo siguiente:

$$(x+a)^1 = x + a = \binom{1}{0}x + \binom{1}{1}a$$

$$(x+a)^2 = x^2 + 2xa + a^2 = \binom{2}{0}x^2 + \binom{2}{1}xa + \binom{2}{2}a^2$$

$$(x+a)^3 = x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3 = \binom{3}{0}x^3 + \binom{3}{1}x^2a + \binom{3}{2}xa^2 + \binom{3}{3}a^3$$

$$(x+a)^4 = x^4 + 4x^3a + 6x^2a^2 + 4xa^3 + a^4 = \binom{4}{0}x^4 + \binom{4}{1}x^3a + \binom{4}{2}x^2a^2 + \binom{4}{3}xa^3 + \binom{4}{4}a^4$$

Se observa la siguiente ley:

$$(x+a)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}a + \binom{n}{2}x^{n-2}a^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}xa^{n-1} + \binom{n}{n}a^n \quad [1]$$

Para demostrar la fórmula [1] del binomio utilizaremos el principio de inducción completa.

a) Para $n = 1$, $(x+a)^1 = \binom{1}{0}x + \binom{1}{1}a$ es decir [1] es cierta para $n = 1$.

b) Supongamos que [1] es cierta para $n = k$

$$(x+a)^k = \binom{k}{0}x^k + \binom{k}{1}x^{k-1}a + \binom{k}{2}x^{k-2}a^2 + \cdots + \binom{k}{k-1}xa^{k-1} + \binom{k}{k}a^k$$

y calculemos $(x + a)^{k+1}$

$$(x+a)^{k+1} = (x+a)^k(x+a) = \left[\binom{k}{0}x^k + \binom{k}{1}x^{k-1}a + \binom{k}{2}x^{k-2}a^2 + \cdots + \binom{k}{k-1}xa^{k-1} + \binom{k}{k}a^k\right](x+a) = \binom{k}{0}x^{k+1} + \binom{k}{1}x^k a +$$

$$+ \binom{k}{2}x^{k-1}a^2 + \cdots + \binom{k}{k-1}x^2a^{k-1} + \binom{k}{k}xa^k + \binom{k}{0}x^k a +$$

$$+ \binom{k}{1}x^{k-1}a^2 + \cdots + \binom{k}{k-1}xa^k + \binom{k}{k}a^{k+1} = \binom{k}{0}x^{k+1} +$$

$$+ \left[\binom{k}{1} + \binom{k}{0}\right]x^k a + \left[\binom{k}{2} + \binom{k}{1}\right]x^{k-1}a^2 + \cdots +$$

$$+ \left[\binom{k}{k-1} + \binom{k}{k}\right]xa^k + \binom{k}{k}a^{k+1}$$

pero $\binom{k}{0} = \binom{k+1}{0} = 1 \quad ; \quad \binom{k}{k} = \binom{k+1}{k+1} = 1$

y los restantes coeficientes pueden obtenerse utilizando la propiedad $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ de los números combinatorios, con lo que se obtiene:

$$(x+a)^{k+1} = \binom{k+1}{0}x^{k+1} + \binom{k+1}{1}x^k a + \binom{k+1}{2}x^{k-1}a^2 + \cdots + \binom{k+1}{k}xa^k + \binom{k+1}{k+1}a^{k+1}$$

es decir, la fórmula [1] es cierta para $n = k + 1$; y por el principio de inducción completa dicha fórmula es cierta para cualquier valor de n.

4. Vamos a calcular el término 12 del desarrollo de $(3x^2 - 5a^3)^{27}$. Este término será:

$$\binom{27}{11}(3x^2)^{16}(-5a^3)^{11} = -\binom{27}{11}3^{16} \cdot 5^{11}x^{32}a^{33}$$

5. Calcula el término 93 de $\left(x - \frac{1}{x^2}\right)^{100}$

6. ¿Cuál es el término de grado 111 en el desarrollo de $(x^3 + 3x^5)^{27}$? Resolución: Supongamos que dicho término sea el de lugar $h + 1$, es decir:

$$T_{h+1} = \binom{27}{h}(x^3)^{27-h}(3x^5)^h = \binom{27}{h}x^{81-3h} \cdot 3^h x^{5h} = \binom{27}{h}x^{81-3h+5h} \cdot 3^h =$$

$$= \binom{27}{h}3^h x^{81+2h}$$

Como el grado de este término es 111, será:

$$81 + 2h = 111 \qquad 2h = 111 - 81 = 30 \qquad h = 15$$

El término pedido es el de lugar 16;

$$T_{16} = \binom{27}{15}(x^3)^{12}(3x^5)^{15} = \binom{27}{15}x^{36} \cdot 3^{15} \cdot x^{75} = \binom{27}{15}3^{15} \cdot x^{111}$$

7. ¿Cuál es el término de grado 82 en el desarrollo de $(2x^3 + x^4)^{25}$?

8. Demuestra que $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$

Sugerencia: Desarrolla $(a+b)^n$ por la fórmula del binomio de Newton y sustituye después en los dos miembros a y b por 1 $\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$

Complementos y ampliación (unidad 5)

1 Vector. Vector libre

Un vector viene dado por un par ordenado de puntos del plano.

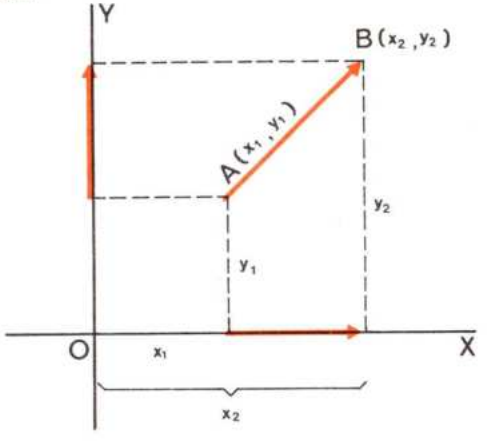
Al primero se le llama origen y al segundo extremo.

Se representa un vector por una flecha que une el origen con el extremo. En la figura se ha representado el vector $\vec{AB}$; A es el origen y B el extremo.

2 Componentes de un vector

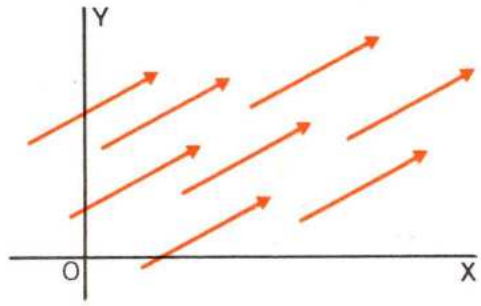
Supongamos en el plano unos ejes coordenados y el vector $\vec{AB}$ dado por los puntos $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$.

Se llaman componentes del vector $\vec{AB}$ al par de números $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.



Dos vectores que tienen las mismas componentes se dice que son equipotentes. Se puede probar fácilmente que la relación de equipolencia es una relación de equivalencia.

La equivalencia determina una clasificación de los vectores del plano en clases de equivalencia. Cada una de estas clases se dice que es un *vector libre*. Los vectores de la figura son equipolentes entre sí.



El conjunto de todos los vectores equipolentes entre sí forman el mismo vector libre y cada uno de los vectores que lo forman es un representante de la clase a que pertenece.

Si consideramos el representante $\overrightarrow{OP}$ cuyo origen está en el punto $O(0, 0)$, las componentes del vector $\overrightarrow{OP}$ coinciden con las coordenadas del extremo $P(x, y)$.

Un vector libre suele darse por sus componentes.

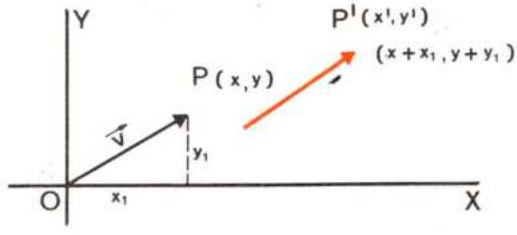
3 Traslación

Se llama traslación de vector $\vec{v}$ a una aplicación del conjunto de los puntos del plano en sí mismo definida de la forma siguiente:

Se toma cada punto del plano como origen de un representante del vector $\vec{v}$. A dicho origen se le hace corresponder el extremo.

Sea un punto cualquiera $P(x, y)$ y una traslación dada por el vector $\vec{v}(x_1, y_1)$. Aplicando la traslación a P se obtiene un nuevo punto $P'(x', y')$

$$(x', y') = (x + x_1, y + y_1)$$



La traslación definida por el vector es una aplicación del conjunto de los puntos del plano en sí mismo, es decir

$t : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dada de la forma siguiente: $(x, y) \longrightarrow (x + x_1, y + y_1)$

4 Traslación de los puntos de una función $y = f(x)$

Sea (x, y) un punto de la función f y (x', y') su transformado mediante la traslación definida por el vector (x_1, y_1)

Se verifica que $\begin{cases} x' = x + x_1 \\ y' = y + y_1 \end{cases}$ es decir: $\begin{cases} x = x' - x_1 \\ y = y' - y_1 \end{cases}$ con lo que la función $y = f(x)$ tomará la forma $y' - y_1 = f(x' - x_1)$.

5 Traslación de una parábola

5.1. Traslación de la parábola definida por $y = ax^2$

Sea $y = ax^2$. Apliquémosle una traslación definida por el vector (x_1, y_1). La nueva parábola vendrá definida por $y' - y_1 = a(x' - x_1)^2$.

Realizando operaciones:

$$y' - y_1 = ax'^2 - 2ax_1x' + ax_1^2 \qquad y' = ax'^2 - 2ax_1x' + ax_1^2 + y_1$$

Volviendo a llamar x, y a las coordenadas, resulta:

$y = ax^2 - 2ax_1x + ax_1^2 + y_1$, ecuación que es del tipo $y = ax^2 + bx + c$, siendo $a = a$, $b = -2ax_1$, $c = a_1x_1^2 + y_1$.

5.2. Recíprocamente, dada la parábola $y = ax^2 + bx + c$, hay una traslación mediante la cual se transforma en una del tipo $y = ax^2$.

Determinemos el vector de esta traslación (x_1, y_1)

$y = ax^2$

$y - y_1 = a(x - x_1)^2 + b(x - x_1) + c \qquad y = a(x - x_1)^2 + b(x - x_1) + c + y_1$

Igualando las expresiones de y resulta: $ax^2 = a(x - x_1)^2 + b(x - x_1) + c + y =$ $= ax^2 - 2axx_1 + ax_1^2 + bx - bx_1 + c + y_1$. Realizando las operaciones del 2.º miembro e igualando coeficientes se obtiene:

$ax^2 = ax^2 + (-2ax_1 + b)x + ax_1^2 - bx_1 + c + y_1$, de donde resulta:

$$a = a$$

$$0 = -2ax_1 + b \Rightarrow x_1 = \frac{+b}{2a}$$

$$0 = ax_1^2 - bx_1 + c + y_1 \Rightarrow y_1 = -ax_1^2 + bx_1 - c = -\frac{ab^2}{4a^2} + \frac{b^2}{2a} - c =$$

$$= \frac{-b^2}{4a} + \frac{2b^2}{4a} - \frac{4ac}{4a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

es decir: $(x_1, y_1) = \left(\frac{b}{2a}, \frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$

Recordando que las coordenadas del vértice eran $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ (ver tema 16)

llegamos a que el vector de la traslación tiene las componentes opuestas a las coordenadas del vértice. Obsérvese que el coeficiente de x^2 permanece invariante en las traslaciones, por lo que se puede afirmar que: dada la parábola $y = ax^2 + bx + c$; su forma viene dada por el coeficiente a. Su posición viene dada por medio de las coordenadas del vértice $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$. Es decir, la parábola $y = ax^2 + bx + c$ tiene la misma forma que la $y = ax^2$, pero el vértice de la primera es $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ mientras que el de la segunda es $(0, 0)$.

5.3. Consecuencia.

Se puede utilizar la conclusión anterior para construir una parábola dada en la forma $y = ax^2 + bx + c$.

Para ello podemos seguir los pasos siguientes:

a) Se hace la gráfica de $y = ax^2$

b) se construye el vector que tiene como origen el punto $(0, 0)$ y extremo el vértice de la parábola $\vec{v}(x_1, y_1)$ $x_1 = \frac{-b}{2a}$; $y_1 = \frac{4ac-b^2}{4a}$

c) Se traslada la parábola $y = ax^2$ aplicándole el vector $\vec{v}$

Ejemplo 1: Sea construir la gráfica de la parábola $y = x^2 - 5x + 6$.

a) Se hace la gráfica de $y = x^2$.

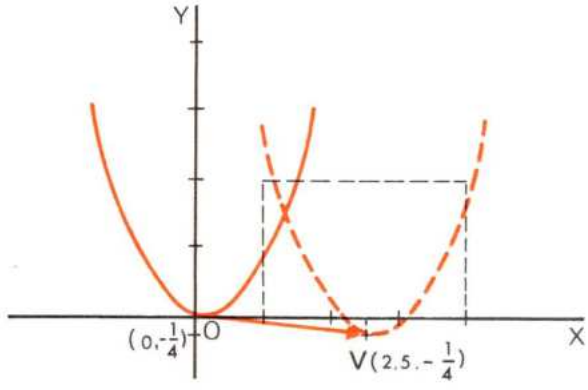
La parte de la parábola, que está a la izquierda del origen, se puede construir por simetría, ya que por ser $(-x)^2 = x^2$, la función $y = x^2$ es simétrica respecto del eje de ordenadas.

b) El vector de traslación OV, donde V es el vértice de la parábola, es (x_1, y_1)

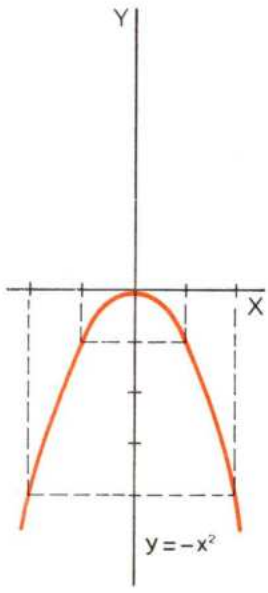
$$x_1 = \frac{-b}{2a} = \frac{5}{2} = 2{,}5$$

$$y_1 = \frac{4ac-b^2}{4a} = \frac{-1}{4}$$

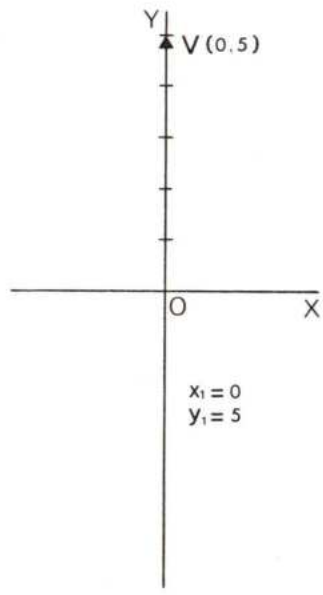
c) Se realiza la traslación



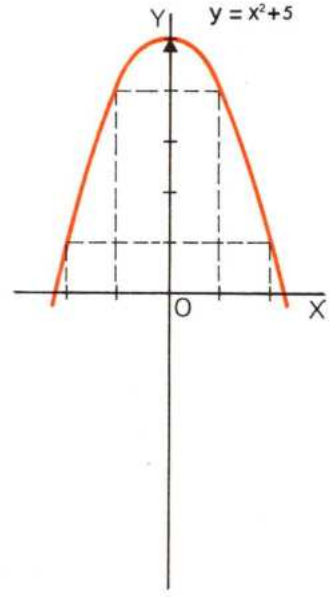
Ejemplo 2: Para construir la parábola $y = -x^2 + 5$ se siguen los pasos indicados en las figuras siguientes:



a) Se traza: $y = -x^2$



b) Se determina el vector de traslación $\vec{OV}$, siendo V el vértice de la parábola.



c) Se traslada la parábola $y = -x^2$ según el vector $\vec{OV}(0, 5)$.

6. Construye las siguientes parábolas:

a) $y = x^2 - x$; b) $y = 3x^2 - 3x$; c) $y = x^2 - 4x + 4$; d) $y = -2x^2 - 5x + 4$.

7. ¿Cuál es el vector de la traslación que transforma la parábola $y = 3x^2 - 12x + 9$ en otra cuyo vértice está en el origen de coordenadas?

8. ¿Cuál es el vector de la traslación que transforma la parábola $y = 3x^2 - 5$ en la parábola $y = 3x^2 - 8x + 2$?

9. ¿Es posible pasar por medio de una traslación de la parábola $y = 2x^2 - 5$ a la $y = 4x^2 - 5$? ¿Por qué?

10. Busca el vértice de las parábolas b), c) y d) completando cuadrados como se hace en a)

a) $y = 2x^2 - 12x + 22 = 2(x^2 - 6x + 11) = 2(x^2 - 6x + 9 + 2) =$
$= 2(x^2 - 6x + 9) + 4 = 2(x - 3)^2 + 4$; el vértice es $V(3, 4)$

b) $y = 2x^2 - 4x + 5$

c) $y = 3x^2 - 12x + 9$

Complementos (unidad 6)

1. Para resolver la inecuación $\frac{1}{x} < 6$, distinguiremos tres casos:

a) $x = 0$; $\frac{1}{x}$ carece de significado

b) $x > 0$. Multiplicando por x en $\frac{1}{x} < 6$ resulta: $1 < 6x \Rightarrow x > \frac{1}{6}$

c) $x < 0$. Si multiplicamos por x los dos miembros de $\frac{1}{x} < 6$ resulta:

$$1 > 6x \Rightarrow x < \frac{1}{6}$$

Es decir, de b) $x > \frac{1}{6}$ y de c) $x < 0$, la solución de la inecuación es pues:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \middle| \left(x > \frac{1}{6} \right) \text{ ó } (x < 0) \right\}$$

2. Vamos a resolver la inecuación $\frac{1}{x-1} > 1$ sumando a los dos miembros -1 se tiene:

$$\frac{1}{x-1} - 1 > 0 \Rightarrow \frac{1 - x + 1}{x - 1} > 0 \Rightarrow \frac{-x+2}{x-1} > 0$$

$$\frac{-x+2}{x-1} > 0 \begin{cases} \begin{cases} -x+2 > 0 \\ \text{y} \\ x - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 2 \\ \text{y} \\ x > 1 \end{cases} & 1 < x < 2 \\ \text{ó} \qquad\qquad \text{ó} \\ \begin{cases} -x+2 < 0 \\ \text{y} \\ x - 1 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 2 \\ \text{y} \\ x < 1 \end{cases} & \text{Imposible} \end{cases}$$

El conjunto solución es $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2\}$

3. Resuelve el sistema:

$$\begin{cases} \sqrt{x} + 2\sqrt{y-1} = 4 \\ \sqrt{x} \cdot \sqrt{y-1} = 2 \end{cases}$$

$$\text{Haciendo } \begin{cases} \sqrt{x} = a \\ \sqrt{y-1} = b \end{cases} \quad \text{resulta: } \begin{cases} a + 2b = 4 \\ a \cdot b = 2 \end{cases}$$

$$a = 4 - 2b \qquad (4 - 2b) \cdot b = 2 \qquad 2b^2 + 4b - 2 = 0$$

Dividiendo por 2 y cambiando el signo se obtiene: $b^2 - 2b + 1 = 0$ la solución única de esta ecuación es $b = 1$; luego $a = 4 - 2b = 2$ y recordando el cambio realizado $\begin{cases} \sqrt{x} = a = 2 \\ \sqrt{y-1} = b = 1 \end{cases}$ resulta: $\begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$ que es la solución del sistema.

Suele llamarse a este método por resolución de «cambio de variables».

4. Dividiendo 240.000 ptas. entre cierta cantidad de personas, una de ellas renuncia a su parte con lo que las demás obtienen 40.000 ptas. más. ¿Cuántas personas eran?

5. Calcula dos números cuya suma, su producto y su cociente sean iguales entre sí.

6. Resuelve la inecuación $\frac{x^2}{2} - 3x + 4 \geqslant 0$

7. Se han comprado ocho bolígrafos y veinte libros con un descuento de 4 por 100, costando 2.534,40 ptas.

Más tarde se compraron diez bolígrafos y veinticinco libros con un descuento del 5 por 100 lo que importó 3.465 ptas. Calcula cuánto valía cada libro y cada bolígrafo.

8. Resuelve la inecuación $\frac{5x + 3}{x - 4} < 2$.

9. Resuelve el siguiente sistema haciendo un cambio de variables:

$$\frac{12}{x} - \frac{24}{y} + \frac{60}{z} = 25; \quad \frac{36}{x} - \frac{12}{y} = 5; \quad \frac{6}{y} - \frac{6}{z} = -1$$

10. Dada la ecuación $\sqrt{10}x - (x + 3) = 7\sqrt{2} - x$, se pide:

a) la solución en forma de cociente en el que pueda haber radicales.

b) la solución en forma de fracción racionalizada.

11. Halla los números reales que verifican la siguiente inecuación $5x + 2 \leqslant -14$, e indica las propiedades que utilizas en su resolución.

Ampliación (unidad 6)

1 Método de eliminación de Gauss para resolver sistemas de ecuaciones lineales

1.1. A continuación vamos a ver un nuevo método de resolución de sistemas: el método de eliminación de Gauss, que tiene pocas ventajas para resolver sistemas de dos o tres incógnitas, pero su utilidad crece rápidamente con el tamaño del sistema, pues permite ordenar los cálculos adecuadamente para su resolución en ordenadores electrónicos, gracias a que es un método que utiliza reiterativamente el mismo sistema de cálculo.

El método de eliminación de Gauss es por este motivo el más empleado en las calculadoras electrónicas y permite resolver, sin dificultad, problemas de más de 100 incógnitas y ecuaciones.

Exponemos el método en el caso de tres ecuaciones con tres incógnitas, pues es igual para un caso más general.

Sea el sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Dividamos la 1.ª ecuación por a_{11}, si $a_{11} \neq 0$. (En caso contrario se elige otra ecuación en la que no sea nulo el coeficiente de x_1.)

Obtenemos

$$x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}} x_3 = \frac{b_1}{a_{11}} \quad (*)$$

Multiplicamos esta ecuación por a_{21} con el objeto de restarle la segunda y eliminar x_1:

$$a_{21}x_1 + a_{21} \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + a_{21} \frac{a_{13}}{a_{11}} x_3 = a_{21} \frac{b_1}{a_{11}}$$

$$\underline{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2}$$

$$\left(a_{21} \frac{a_{12}}{a_{11}} - a_{22}\right) x_2 + \left(a_{21} \frac{a_{13}}{a_{11}} - a_{23}\right) x_3 = a_{21} \frac{b_1}{a_{11}} - b_2$$

Análogamente multiplicando la (*) por a_{31} y restando la 3.ª ecuación resulta:

$$\left(a_{31} \frac{a_{12}}{a_{11}} - a_{32}\right) x_2 + \left(a_{31} \frac{a_{13}}{a_{11}} - a_{33}\right) x_3 = \left(a_{31} \frac{b_1}{a_{11}} - b_3\right)$$

Después de sustituir cada uno de los paréntesis anteriores por una letra, el sistema toma la forma:

$$x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 = c_1; \quad b_{22}x_2 + b_{23}x_3 = c_2; \quad b_{32}x_2 + b_{33}x_3 = c_3$$

Operando de forma similar con las dos últimas ecuaciones (para eliminar x_2 en una de ellas) el sistema se reduce a la forma:

$$x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 = c_1; \quad x_2 + c_{23}x_3 = d; \quad c_{33}x_3 = f$$

Despejando x_3 de la última se sustituye en la 2.ª de la que se obtiene x_2, y sustituyendo estos valores de x_3 y x_2 en la 1.ª resulta el valor de x_1.

1.2. Vamos a resolver por el método de eliminación de Gauss el sistema:

$$[1] \begin{cases} 2x + 10y - 6z = 15 & [a] \\ 3x + 2y + 2z = 4 & [b] \\ 5x + 2y - 6z = 10 & [c] \end{cases}$$

Dividimos la ecuación $[a]$ por 2; $x + 5y - 3z = \frac{15}{2}$ $[a']$; después multiplicamos la ecuación $[a']$ por 3 y le restamos la ecuación $[b]$

$$x + 5y - 3z = \frac{15}{2} \qquad 3x + 15y - 9z = \frac{45}{2}$$

$$\underline{3x + 2y + 2z = 4} \quad [b]$$

$$13y - 11z = \frac{37}{2}$$

Multiplicamos la ecuación $[a']$ por 5 y le restamos la ecuación $[c]$

$$\begin{array}{r} 5x + 25y - 15z = \dfrac{75}{2} \\ 5x + 2y - 6z = 10 \quad [c] \\ \hline 23y - 9z = \dfrac{55}{2} \end{array} \qquad \text{El sistema queda} \quad \begin{cases} x + 5y - 3z = \dfrac{15}{2} \\ 13y - 11z = \dfrac{37}{2} \\ 23y - 9z = \dfrac{55}{2} \end{cases}$$

Repetimos el procedimiento en el sistema

$$[2] \begin{cases} 13y - 11z = \dfrac{37}{2} \\ 23y - 9z = \dfrac{55}{2} \end{cases} \text{ Dividiendo la 1.ª ecuación por 13 resulta } y - \frac{11}{13} z = \frac{37}{26} \; [\Delta]$$

Multiplicamos la ecuación $[\Delta]$ por 23 y le restamos la ecuación 2.ª.

$$\begin{array}{r} 23y - 23 \cdot \dfrac{11}{13} z = 23 \cdot \dfrac{37}{26} \\ 23y - 9z = \dfrac{55}{2} \\ \hline \dfrac{-136}{13} z = \dfrac{136}{26} \end{array} \qquad \text{El sistema queda} \quad [3] \begin{cases} x + 5y - 3z = \dfrac{15}{2} \\ y - \dfrac{11}{13} z = \dfrac{37}{26} \\ -\dfrac{136}{13} z = \dfrac{136}{26} \end{cases}$$

En este sistema se obtiene z de la 3.ª ecuación: $z = -\dfrac{1}{2}$

Sustituyendo en la segunda se tiene: $y = \dfrac{37}{26} + \dfrac{11}{13}\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{26}{26} = 1$

Finalmente, llevando a la 1.ª ecuación los valores de z e y resulta: $x = \dfrac{15}{2} - 5y +$

$+ 3z = \dfrac{15}{2} - 5 - \dfrac{3}{2} = 1$

La solución es: $x = 1, \; y = 1, \; z = \dfrac{-1}{2}$

2. Utiliza el método de eliminación de Gaüss en la resolución de los sistemas:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 5 \\ x - 2y + z = 6 \\ y - z = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + z = 4 \\ y - z = 1 \\ x + z = 3 \end{cases}$$

Complementos (unidad 7)

1. Encuentra tres términos en progresión aritmética, sabiendo que su suma es 24 y que si al primero se le resta una unidad y al segundo dos unidades, se obtiene una progresión geométrica.

2. Demuestra por el principio de inducción las fórmulas $a_n = a_1 r^{n-1}$ y $a_n = a_1 + (n-1)d$ de las progresiones.

3. El producto de tres números en progresión geométrica es 216. Si se multiplica el 1.º por 12, el 2.º por 5 y el 3.º por 2 se obtienen tres números en progresión aritmética. Calcula esos números.

4. Tres números x, y, z suman 30. Escritos en el orden x, y, z están en progresión aritmética y en el orden x, z, y están en progresión geométrica. Halla x, y, z.

Complementos (unidad 8)

1. Se tiene en una bolsa cuarenta bolas numeradas de uno a cuarenta. Se saca una al azar. Halla:

a) la probabilidad de que la bola tenga un número múltiplo de cinco

b) la probabilidad de que la bola tenga un número múltiplo de dos

c) la probabilidad de que la bola tenga un número que sea múltiplo de dos o cinco

d) la probabilidad de que la bola tenga un número que sea múltiplo de dos y cinco

2. Sea p una función de probabilidad de $E = \{a_1, a_2, a_3\}$ en $\mathbb{R}$. Halla:

a) $p(a_1)$, si $p(a_2) = \frac{1}{2}$ y $p(a_3) = \frac{1}{3}$

b) $p(a_1)$, si $p(a_1) = 2p(a_2)$ y $p(a_3) = \frac{1}{2}$

3. Una moneda cargada es tal que $p(c) = \frac{2}{3}$ y $p(x) = \frac{1}{3}$. Se lanza tres veces. Se pide:

a) dibujar el diagrama en árbol del espacio muestral

b) la probabilidad de cada suceso elemental.

Ampliación (unidad 8)

1 Probabilidad condicionada

1.1. En el experimento aleatorio de lanzar un dado consideremos los sucesos

$$A = \{2, 4, 6\} \quad \text{y} \quad B = \{3, 6\}$$

Considerando los sucesos elementales equiprobables se tiene:

$$p(A) = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad p(B) = \frac{1}{3}$$

Si se ha realizado el suceso A, podemos preguntarnos. ¿Cuál es la probabilidad de que se realice el suceso B?

La probabilidad de que se realice B, cuando se ha realizado A, se escribe: $p(B/A)$, y se lee: »probabilidad de B condicionada a A«.

En el ejemplo $p(B/A) = \frac{1}{3}$, ya que si aparece el 3 ó el 6 se realiza B, y supuesto que han salido él 2, el 4 ó el 6, el que aparezca éste último tiene de probabilidad $\frac{1}{3}$.

1.2. Sea A el suceso consistente en que la primera carta extraída de una baraja sea un As y B que lo sea la segunda.

La probabilidad de B/A es $p(B/A) = \frac{3}{39}$, ya que si ha salido la primera carta As quedan tres Ases y treinta y nueve cartas.

1.3. Sea un experimento aleatorio que puede dar lugar a los sucesos A y B. Supongamos que en n pruebas

n_A es la frecuencia absoluta de A

n_B es la frecuencia absóluta de B

$n_{A\cap B}$ es la frecuencia absoluta de $A \cap B$.

Por tanto:

$$f_r(A) = \frac{n_A}{n} \quad ; \quad f_r(B) = \frac{n_B}{n} \quad ; \quad f_r(A \cap B) = \frac{n_{A\cap B}}{n}$$

La frecuencia relativa de B, condicionada a la verificación del suceso A, es

$$f_r(B/A) = \frac{n_{A\cap B}}{n_A} \quad [1]$$

Para que este cociente tenga sentido $n_A \neq 0$.

De [1] se deduce: $n_A \cdot f_r(B/A) = n_{A\cap B}$.

Y dividiendo por n (número de pruebas) resulta: $\frac{n_A}{n} \cdot f_r(B/A) = \frac{n_{A\cap B}}{n}$, es decir

$$f_r(A) \cdot f_r(B/A) = f_r(A \cap B)$$

De la misma manera se llega al resultado

$$f_r(B) \cdot f_r(A/B) = f_r(A \cap B)$$

Luego:

La frecuencia relativa del suceso intersección de dos sucesos dados, es igual a la frecuencia relativa de uno de ellos por la frecuencia del otro condicionada por éste.

1.4. Pasando por abstracción al concepto de probabilidad se tiene:

Si un experimento aleatorio da lugar a los sucesos A y B, se llama probabilidad condicionada del suceso B respecto del suceso A, y se designa por p(B/A) al cociente:

$$p(B/A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} \qquad p(A) \neq 0$$

2 Dependencia e independencia de sucesos

2.1. Consideremos nuevamente el experimento de lanzar un dado y los sucesos A, B y C

$$A = \{1, 2\}, \quad B = \{1, 2, 3\}, \quad C = \{2, 3, 4\}$$

que como sabemos son subconjuntos del espacio muestral $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Considerando los sucesos elementales equiprobables se tiene:

$$p(A) = \frac{1}{3}, \quad p(B) = p(C) = \frac{1}{2}$$

Tenemos aquí dos casos:

a) $p(B/A) \neq p(B)$.

Nótese que si se verifica el suceso A se verifica siempre el suceso B ya que $A \subset B$

b) $p(C/A) = p(C)$

La realización del suceso A no afecta a la probabilidad del suceso C.

En a) se dice que los sucesos A y B son *dependientes.*

En b) se dice que los sucesos A y C son *independientes.*

2.2. En el caso de sucesos independientes se verifica:

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B/A) = p(A) \cdot p(B)$$

La independencia entre dos sucesos A y B se puede definir ahora de tres formas equivalentes: 1.ª) $p(A/B) = p(A)$; 2ª) $p(B/A) = p(B)$; 3.ª) $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$.

Obtener dos 6 en dos tiradas de un dado con sucesos independientes.

$$p(6 \quad \text{y} \quad 6) = p(6) \cdot p(6) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

Sacar dos ases de una baraja española (dos extracciones consecutivas) *no son* sucesos independientes.

$$p(\text{As} \quad \text{y} \quad \text{As}) = p(\text{As}) \cdot p(\text{As/As}) = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39}$$

La segunda extracción de As depende de la primera.

3. Se extrae una carta de una baraja española dos veces consecutivas: ¿Cuál es la probabilidad de que la primera vez salga un rey y la segunda un caballo?

¿Cuál es la probabilidad de que en las dos extracciones salgan reyes?

1. Dados los números complejos $z_1 = 3 + bi$ y $z_2 = -4 + di$, calcula b y d sabiendo que $z_1 \cdot z_2 = -22 + 7i$

$$z_1 \cdot z_2 = (3 + bi)\cdot(-4 + di) = (-12 - bd) + (-4b + 3d)i$$

De $-22 + 7i = (-12 - bd) + (-4b + 3d)i$ y de la definición de igualdad de números complejos resulta el siguiente sistema:

$$\begin{cases} -12 - bd = -22 \\ -4b + 3d = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} bd = 10 \\ -4b + 3d = 7 \end{cases} \Rightarrow d = \frac{10}{b}$$

Llevando este valor a la segunda ecuación del sistema se tiene:

$$-4b + \frac{30}{b} = 7 \Rightarrow -4b^2 + 30 = 7b \Rightarrow 4b^2 + 7b - 30 = 0$$

Resolviendo la ecuación anterior se obtiene: $b_1 = 2$, $b_2 = \frac{-15}{4}$

Las soluciones del sistema son:

$$b_1 = 2 \qquad b_2 = \frac{-15}{4}$$
$$\text{y}$$
$$d_1 = 5 \qquad d_2 = \frac{-8}{3}$$

Los números complejos z_1 y z_2 son:

$$z_1 = 3 + 2i; \quad z_2 = -4 + 5i \quad \text{o} \quad z_1 = 3 + \frac{-15}{4}\,i; \quad z_2 = -4 + \frac{-8}{3}\,i$$

2. Calcula las componentes x e y en $\alpha = 5 + xi$ y $\beta = 4 + yi$, sabiendo que $\alpha \cdot \beta = 28 - 6i$.

3. Calcula el cociente $\frac{a + i}{c + i}$, y determina a para que el módulo del cociente sea $\sqrt{2}$

$$\frac{a + i}{2 + i} = \frac{(a + i)\cdot(2 - i)}{(2 + i)\cdot(2 - i)} = \frac{2a + 1 + (2 - a)i}{4 + 1} = \frac{2a + 1}{5} + \frac{2 - a}{5}\,i$$

Como el módulo es $\sqrt{2}$, se tiene:

$$\left(\frac{2a + 1}{5}\right)^2 + \left(\frac{2 - a}{5}\right)^2 = 2 \Rightarrow \frac{4a^2 + 1 + 4a + 4 + a^2 - 4a}{25} = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4a^2 + 1 + 4a + 4 + a^2 - 4a = 50 \Rightarrow 5a^2 = 45 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = \pm 3$$

4. El inverso de un número complejo imaginario puro. ¿Es imaginario puro? Pon un ejemplo y representa los resultados gráficamente.

5. Dados los números complejos $z = 1 - i$, $\omega = 2i$.

Halla: $\begin{cases} \text{Re}\,(u),\ \text{Im}\,(u),\ -u,\ u,\ \frac{1}{u}\ \text{y}\ |u| \\ \frac{z}{\omega},\ \frac{\omega}{z},\ \omega\bar{\omega} - \bar{z},\ \omega\bar{\omega} + \bar{z},\ |\omega\bar{\omega} + \bar{z}|,\ |\omega - z|,\ |\omega + z| \end{cases}$ siendo $u = z - 3\omega^2$

7. Resuelve las siguientes ecuaciones $4x^2 - 4x + 1 = 0$, $x^2 + 4x + 8 = 0$ y representa gráficamente sus raíces.

Ecuación de 2º grado con coeficientes complejos

1.1. Vamos ahora a resolver la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$, donde los coeficientes a, b, c, en vez de ser reales son números complejos arbitrarios.

Como $\mathbb{C}$ es un cuerpo, como lo es $\mathbb{R}$, las operaciones sobre $\mathbb{C}$ se comportan igual que las operaciones con números reales. Recordando el método de resolución en $\mathbb{R}$, resulta: $ax^2 + bx + c = 0$[1]

a) Se multiplica por $4a$ los dos miembros de [1]

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$

b) Sumamos y restamos b^2

$4a^2x^2 + 4abx + 4ac + b^2 - b^2 = 0$, de donde $4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$; el primer miembro es el cuadrado de $(2ax + b)$, luego $(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$,

de aquí que $2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$; $\quad x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Como se ve la fórmula es la misma que en el caso de coeficientes reales, pero el discriminante $b^2 - 4ac$ es ahora, en general, un número complejo. Veamos como se obtienen las raíces.

1.2. Sea la ecuación $x^2 + ix + 2 = 0$ aplicando la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-i \pm \sqrt{i^2 - 8}}{2} = \frac{-i \pm \sqrt{-9}}{2} = \frac{-i \pm 3i}{2};$$

$$x_1 = \frac{-i + 3i}{2} = i; \quad x_2 = \frac{-i - 3i}{2} = -2i$$

1.3. Vamos a resolver ahora la ecuación $x^2 + 7x - 3ix + 10 - 15i = 0$, se tiene $x^2 + (7 - 3i)x + (10 - 15i) = 0$, en este caso $a = 1, b = 7 - 3i, c = 10 - 15i$. Aplicando la fórmula de **1.1.**

$$x = \frac{-(7-3i) \pm \sqrt{49 - 9 - 42i - 40 + 60i}}{2} = \frac{-(7-3i) \pm \sqrt{18i}}{2} = \frac{-(7-3i) \pm \sqrt{18}\sqrt{i}}{2}$$

y teniendo en cuenta las raíces de i obtenidas en **12.1.** resulta:

$$\frac{-(7 - 3i) \pm \sqrt{18}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)}{2} = \frac{-(7 - 3i) \pm 3\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)}{2} =$$

$$= \frac{-(7 - 3i) \pm (3 + 3i)}{2}, \quad \text{de donde} \quad \begin{cases} x_1 = -2 + 3i \\ x_2 = -5 \end{cases}$$

2. Resuelve las ecuaciones:

a) $x^2 + 4i = 0$.
b) $x^2 - ix - 4 = 0$.

3. Resuelve la ecuación $(2 + i)x^2 + (3 - 2i)x = 0$.

4. Resuelve la ecuación $x^4 + 13x^2 + 36 = 0$ llamando $x^2 = y$ y representa gráficamente las soluciones.

En la realización del libro SANTILLANA
de **"Matemática"** para el primer curso de Bachillerato
ha intervenido el siguiente equipo:

Máximo Anzola.
(Lic. en Matemática. Prof. agregado del Instituto Nacional de Bachillerato "Simancas", Madrid.)

José Caruncho.
(Doctor en Matemática. Prof. de la Universidad Autónoma de Madrid.)

María Gutiérrez.
(Lic. en Matemática.)

Dirección científica:

José Antonio Fernández Viña.
(Catedrático de Matemática General de la Universidad Autónoma de Madrid.)

Dirección editorial:

José Gil Martos.
(Prof. de Matemática.)

© 1975 by SANTILLANA, S. A.
Elfo, 32 - Madrid-27.
PRINTED IN SPAIN
Impreso en España en los
Talleres Gráficos Mateu Cromo, S. A.
Carretera de Pinto a Fuenlabrada, s/n. Pinto (Madrid)
ISBN: 84-294-1251-4
Depósito Legal: M. 5.930-1978

Texto aprobado por el Ministerio de Educación y Ciencia en O. M. de 4-5-76.

textos **santillana** para el Bachillerato

1

Ciencias Naturales
Dibujo
Francés
Historia de las Civilizaciones
Inglés
Lengua Española y Literatura
Matemática

2

Física y Química
Francés
Geografía
Inglés
Latín
Lengua Española y Literatura
Matemática

3

Filosofía
Francés
Geografía e Historia
Inglés
Matemática

Ciencias Naturales
Física y Química
Griego
Latín
Lengua Española y Literatura